1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°1 : Généralités sur les fonctions

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice1 : Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x^2 + 2x + 2$

1) Calculer les images de $\frac{-1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par f.

2) Montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f

4) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 3)

Solution : 1) Calcul des images :

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2\times\left(\frac{-1}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{4} - 1 + 2 = \frac{3}{4}$ et $f\left(\sqrt{3}\right) = -\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\times\left(\sqrt{3}\right) + 2 = -3 + 2\sqrt{3} + 2 = -1 + 2\sqrt{3}$

2) Pour montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f il suffit de montrer que : $f\left(1+\sqrt{2}\right) = 1$?

$f\left(1+\sqrt{2}\right) = -\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2\times\left(1+\sqrt{2}\right) + 2 = -\left(1+2\sqrt{2}+2\right) + 2 + 2\sqrt{3} + 2 = -3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 1$

Donc : $f\left(1+\sqrt{2}\right) = 1$ par suite : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f

3) x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x) = 0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Équivaut à : $-x^2 + 2x + 2 = 0$ $a = -1$ et $b = 2$ et $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times 2\times(-1) = 4 + 8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_1 = \frac{-2-2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3}$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

4) les antécédents éventuels de 0 par f sont : $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Donc : l'intersection de (C_f) la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points :

$A\left(1-\sqrt{3};0\right)$ et $B\left(1+\sqrt{3};0\right)$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$ 2) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ 3) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$ 4) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$.

5) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$ 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}-x^2}{3x^2+6x+5}$ 7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-x}{x-1}$

8) $f(x)=\dfrac{-2x+6}{\left|x^2-2x+3\right|-2}$ 9) $f(x)=\dfrac{2\cos 3x\sin x}{\cos x\left(2\sin x+1\right)}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\right\}$

$2x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{2}=2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{2\right\}$ (On dira aussi que : 2 est une valeur interdite pour la fonction f)

2) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\right\}$

$2x^2-5x-3=0$ On : $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

Donc : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc : $x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ et $x_2=\dfrac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

3) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-x\geq 0 \text{ et } x\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\leq 0 \text{ et } x\neq 0\right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty,0\right[$

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-9x+3}{x+1}\geq 0 \text{ et } x+1\neq 0\right\}$

$-9x+3=0 \Leftrightarrow -9x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ et $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,\dfrac{1}{3}\right]$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0 \text{ et } x^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

OF: ATMANI NAJIB

Le discriminant est $\Delta'=2^2-4\times(-2)\times 13=108$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme : x^2-x-6 :

Le discriminant est $\Delta=(-1)^2-4\times(-6)\times 1=25$ et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{1-5}{2}=-2$ et $x_2'=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

6) $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}-x^2}{3x^2+6x+5}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\neq 0 \;\; et \;\; x-3\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/3x^2+6x+5\neq 0 \;\; et \;\; x\geq 3\}$

$3x^2+6x+5=0$: $\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times 3\times 5=36-60=-24<0$ (Pas de solutions)

Donc : $3x^2+6x+5\neq 0$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\,x\geq 3\}$

Donc : $D_f=[3;+\infty[$

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-x}{x-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0 \;\; et \;\; x+3\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1 \;\; et \;\; x\geq -3\}$

Donc : $D_f=[-3;1[\cup]1;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x^2-2x+3|-2\neq 0\}$

$|x^2-2x+3|-2=0$ Signifie que : $|x^2-2x+3|=2$

Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

- Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

• Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, seule solution : $x=1$

D'où : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 1\}=\mathbb{R}-\{1\}$

9) $f(x)=\dfrac{2\cos 3x\sin x}{\cos x(2\sin x+1)}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\cos x(2\sin x+1)\neq 0\}$

$$\cos x(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \quad ou \quad 2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \quad ou \quad \sin x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \quad ou \quad \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice3 : Soit f la fonction numérique définie sur $[-\pi\,;\pi]$ par : $f(x)=\sqrt{3\tan x-\sqrt{3}}$

Déterminer D_f

Solution : $x\in D_f \Leftrightarrow x\in[-\pi\,;\pi] \quad et \quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad et \quad 3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $x\in[-\pi\,;\pi]$ alors : $x\neq\frac{\pi}{2}$ et $x\neq-\frac{\pi}{2}$

• Résolution de l'équation : $3\tan x-\sqrt{3}=0$

On a $3\tan x-\sqrt{3}=0$ Équivaut à : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

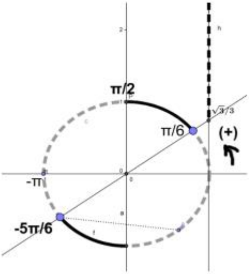
$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[-\pi\,;\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\tan x$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans $[-\pi\,;\pi]$

On trouve que : $\tan x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$



PROF: ATMANI NAJIB

Équivaut à : $x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $D_f = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice4 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \frac{2x-1}{x+2} & si \quad x \le 0 \\ f(x) = \frac{3}{x^2-1} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1) Calculer : $f(0)\ ;f(2)\ ;f(-1)$

2)Déterminer D_f

Solution : 1) Calculons : $f(0)\ ;f(2)\ ;f(-1)$

→ Puisque : $x \le 0$ Alors : $f(0) = \frac{2\times 0-1}{0+2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

→ Puisque : $2 > 0$ Alors : $f(2) = \frac{3}{2^2-1} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$

→ Puisque : $-1 \le 0$ Alors : $f(0) = \frac{2\times(-1)-1}{-1+2} = \frac{-3}{1} = \boxed{-3}$

2)*Remarque :* $\begin{cases} f(x) = f_1(x) & si \quad x \in I_1 \\ f(x) = f_2(x) & si \quad x \in I_2 \end{cases}$ Alors : $D_f = (D_{f_1} \cap I_1) \cup (D_{f_2} \cap I_2)$

On pose : $f_1(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ et $I_1 =]-\infty;0]$ et $f_2(x) = \frac{3}{x^2-1}$ et $I_2 =]0;+\infty[$

$D_{f_1} =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ et $D_{f_2} =]-\infty;-1] \cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

$D_{f_1} \cap I_1 =]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ et $D_{f_2} \cap I_2 =]0;1[\cup]1;+\infty]$

Donc : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;0] \cup]0;1[\cup]1;+\infty]$

Donc : $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$

Exercice5 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^9 + bx^3 + cx + 11$

Si on sait que : $f(-3) = 8$ calculer : $f(3)$

Solution : On a : $f(x) = ax^9 + bx^3 + cx + 11$

Donc : $f(-x) = a(-x)^9 + b(-x)^3 + c(-x) + 11$

Donc : $f(-x) = -ax^9 - bx^3 - cx + 11$

Donc : $f(x) + f(-x) = 22$

Donc : $f(-3) + f(3) = 22$ et comme : $f(-3) = 8$

Donc : $f(3) = 22 - f(-3) = 22 - 8 = \boxed{14}$

Exercice6: Les fonction f et g définies respectivement par : $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

PROF: ATMANI NAJIB

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+3}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

Donc : ce qui donne $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

Ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$ on a : f (x) = g(x)

Exercice7 : Soient les deux fonctions : $f(x)=\frac{1+2x}{1+x}$ et $g(x)=\frac{1-x}{1-2x}$

1) Comparer les fonctions f et g

2) En déduire une comparaison des nombres : $a=\frac{0,9999}{0,9998}$ et $b=\frac{1,0002}{1,0001}$

Solution : 1) Comparons les fonctions f et g

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1+2x}{1+x}-\frac{1-x}{1-2x}=\frac{(1+2x)(1-2x)-(1+x)(1-x)}{(1+x)(1-2x)}=\frac{1-4x^2-1-x^2}{(1+x)(1-2x)}=\frac{3x^2}{(1+x)(2x-1)}$$

Le signe de : $f(x)-g(x)$ est celui de : $(1+x)(2x-1)$

$$f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow(1+x)(2x-1)\geq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$$f(x)\leq g(x)\Leftrightarrow x\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[$$

Conclusion : $f\geq g$ sur : $]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f\leq g$ sur : $\left]-1;\frac{1}{2}\right[$

2) Déduisons une comparaison des nombres : $a=\frac{0,9999}{0,9998}$ et $b=\frac{1,0002}{1,0001}$

On a : $a=\frac{0,9999}{0,9998}$ et $b=\frac{1,0002}{1,0001}$

PROF. ATMANI NAJIB

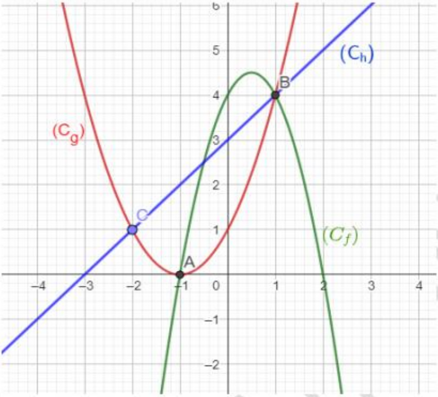
Donc : $a=g(0{,}0001)$ et $b=f(0{,}0001)$ et puisque : $0{,}0001\in\left]-1;\frac{1}{2}\right[$

Alors : $f(0{,}0001)\le g(0{,}0001)$

Alors : $b\le a$

Exercice 8 : Soient f ; g et h trois fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)et (C_h) si dessous :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}\ge 0$



ATMANI NAJIB

Solution : Etudions le signe de : $\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$g(x)$		+		+	0	+		+	
$h(x)$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		−		−	0	+	0	−	
$\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$		+	0	−	‖	+	‖	−	

$\frac{g(x)\times h(x)}{f(x)}\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right]\cup\left]-1;2\right[$

$S=\left]-\infty;-3\right]\cup\left]-1;2\right[$

Exercice9 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$ 2) $g(x)=(2+x)^2-(2-x)^2$ 3) $h(x)=\sqrt{x-1}$ 4) $k(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$

Solution : 1) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ c'est-à-dire : $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

$f(-x)=f(x)$

Donc : f est une fonction paire

2) $g(x)=(2+x)^2-(2-x)^2$

a) On a : $D_g=\mathbb{R}$

b)

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $g(-x)=(2-x)^2-(2-(-x))^2$

$g(-x)=(2-x)^2-(2+x)^2$

$g(-x)=-\left(-(2-x)^2+(2+x)^2\right)$

$g(-x)=-\left((2+x)^2-(2-x)^2\right)$

Donc : $g(-x)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tel que : $h(x)=\sqrt{x-1}$

$D_h=\{x\in E/h(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_h=\{x\in E/x-1\geq 0\}$

$D_h=\{x\in E/x\geq 1\}$

Par suite : $D_h=[1;+\infty[$

Par exemple on a : $2\in[1;+\infty[$ mais : $-2\notin[1;+\infty[$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) $k(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$. $D_k=\{x\in\mathbb{R}/1-\cos x\neq 0\}$

$1-\cos x=0$ Signifie $\cos x=1$

C'est-à-dire : $x=0+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_k=\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

☞ $k(-x)=\dfrac{2\sin(-x)}{1-\cos(-x)}=\dfrac{-2\sin x}{1-\cos x}=-\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}=-g(x)$ Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc k est une fonction impaire

Exercice10 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = -3x+2 \;\; si \;\; x \in]-\infty;-1[\\ f(x) = x^2 - 2|x| \;\; si \, x \in [-1,1] \\ f(x) = 3x+2 \;\; si \, x \in]1;+\infty[\end{cases}$

1) Déterminer une définition plus simplifiée de f

2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1)

☞Si : $x \in]-\infty;-1[$ alors : $f(x) = -3x+2$ et $|x| = -x$

Donc : $f(x) = 3|x|+2$

☞Si : $x \in]1;+\infty[$ alors : $f(x) = 3x+2$ et $|x| = x$

Donc : $f(x) = 3|x|+2$

Par suite si : $|x|>1$ alors : $f(x) = 3|x|+2$

☞Si : $x \in [-1,1]$ alors : $f(x) = x^2 - 2|x|$

Conclusion : $\begin{cases} f(x) = 3|x|+2 \;\; si \;\; |x|>1 \\ f(x) = x^2 - 2|x| \;\; si \;\; |x| \leq 1 \end{cases}$

2)☞ Si : $|x| \leq 1$ alors : $|-x| \leq 1$

Donc : $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x| = f(x)$

☞→Si : $|x|>1$ alors : $|-x|>1$

Donc : $f(-x) = 3|-x|+2 = 3|x|+2 = f(x)$

Donc : $f(-x) = -f(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(-x) = f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Alors : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de (C_f)

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$

C'est-à-dire : le domaine d'étude de f est : $D_E = \mathbb{R}^+$

Exercice11 : Soit la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{|x|+1}{2|x|-3}$

(C_f) La courbe de f Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x| - 3 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / |x| \neq \dfrac{3}{2}\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$ alors $-x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$

- $f(-x) = \frac{|-x|+1}{2|-x|-3} = \frac{|x|+1}{2|x|-3} = f(x)$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice12 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = |x-2|-3$

Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f et déterminer les extremums de f

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = |x-2|-3$

a) Si : $x \geq 2$ alors : $f(x) = x-2-3 = x-5$

b) Si : $x \leq 2$ alors : $f(x) = -(x-2)-3 = -x-1$

Donc : f est strictement croissante sur : $[2;+\infty[$ car : $f(x) = ax+b = 1x-5$ et $a > 0$

f est strictement décroissante sur : $]-\infty;2]$ car : $f(x) = ax+b = -1x-1$ et $a = -1 < 0$

le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

D'après le tableau de variations de f : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq f(2)$

Donc : $f(2) = -3$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 2$

Exercice13 : Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $f(x) = x^2$ 2) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ 3) $h(x) = 2025x^2 + 5$ 4) $k(x) = \frac{-5}{x}$

Réponses : 1) $f(x) = x^2$ et $D_f = \mathbb{R}$

On sait que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc : $g = -\frac{1}{2}f$

On puisque que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ et que : $-\frac{1}{2} < 0$

Alors : $g = -\frac{1}{2}f$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;0]$

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↗	0	↘

$g(0)=-\frac{1}{2}0^2=0$

3) $h(x)=2025x^2+5$ et $D_h=\mathbb{R}$ donc : $h=2025f+5$

On puisque que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ et que : $2025>0$

Alors : $f=2025f+5$ est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	↘	5	↗

$h(0)=2025\times 0^2+5=5$

4) $k(x)=\frac{-5}{x}$ et $D_k=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $k=-5v$

Alors : k est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-5<0$

Exercice14 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{2}(|x+2|-|x-2|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f.
3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=[0;2]$ et $J=[2;+\infty[$.
4) Dresser son tableau de variation sur D_f
5) Soit (C_f) la courbe de f .

a) Est ce que les points $A(2;2)$ et $B(1;2)$ et $c(3;5)$ et $D(3;2)$ appartiennent à la courbe (C_f)

b) Tracer la courbe (C_f) dans un repère : $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Solution : 1) Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞ $f(-x)=\frac{1}{2}(|-x+2|-|-x-2|)=\frac{1}{2}(|-(x-2)|-|-(x+2)|)$

$f(-x)=\frac{1}{2}(|(x-2)|-|(x+2)|)$ Car $|-x|=|x|$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(|-(x-2)|+|(x+2)|)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(||(x+2)|-(x-2)|)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E = \mathbb{R}^+$

3) si $x \in I = [0;2]$ alors : $0 \le x \le 2$

Donc : $x-2 \le 0$ et $x+2 \ge 0$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x+2-\left(-(x-2)\right)\right) = \frac{1}{2}(x+2+x-2) = x$

Si $x \in J = [2;+\infty[$ alors : $x \ge 2$

Donc : $x-2 \ge 0$ et $x+2 \ge 0$

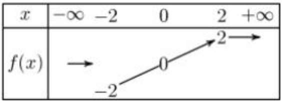
Par suite : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x+2-(x-2)\right) = \frac{1}{2}(x+2-x+2) = 2$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x) = x \ si \ x \in I = [0;2] \\ f(x) = 2 \ si \ x \in J = [2;+\infty[\end{cases}$

4) Tableau de variation sur D_f :

On a : f est constante sur l'intervalle : $J = [2;+\infty[$ et croissante dans $I = [0;2]$

Et puisque f est une fonction impaire alors f est constante sur l'intervalle : $J' =]-\infty;-2]$ et croissante dans $I' = [-2;0]$ d'où le tableau de variation suivant :


x
$-\infty$
-2
0
2
$+\infty$
$f(x)$
-2
0
2

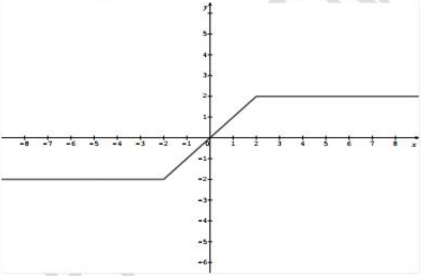
a) On a : $f(2) = \frac{1}{2}(|2+2|-|2-2|) = 2$ donc : $A(2;2) \in (C_f)$

On a : $f(1) = \frac{1}{2}(|1+2|-|1-2|) = 1 \neq 2$ donc : $B(1;2) \notin (C_f)$

On a : $f(3) = \frac{1}{2}(|3+2|-|3-2|) = 2 \neq 5$ donc : $C(3;5) \notin (C_f)$

On a : $f(3) = 2$ donc : $D(3;2) \in (C_f)$

b) f est une fonction impaire donc (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère



Exercice15 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$. Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ par suite : $\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$

Donc : $f(x)\leq 1$ par suite f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=1$

2) On a $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2\geq 0$ donc $x^2+1\geq 0+1$

Donc $x^2+1\geq 1$ par suite : $x^2+1\succ 0$

Donc : $0\prec f(x)$

Par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m=0$

Conclusion : $0\leq f(x)\leq 1\quad \forall x\in\mathbb{R}$: f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que : $f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

b) Est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) Est ce que 2 est une valeur minimale de f. ?

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-3=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}-3=\dfrac{2x^2+3-3(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+3-3x^2-3}{x^2+1}$

Donc $f(x)-3=\dfrac{-x^2}{x^2+1}\leq 0$ par suite $f(x)\leq 3$ si $x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(0)=3$ donc $f(x)\leq f(0)$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc : 3 est une valeur maximale de f

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$; $f(x)-2=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}-2=\dfrac{2x^2+3-2(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}$

Donc : $f(x)-2=\dfrac{1}{x^2+1}\succ 0$ par suite : $0\prec f(x)$ si $x\in\mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(x)\succ 2\quad \forall x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

Conclusion : $2 \prec f(x) \leq 3$ si $x \in \mathbb{R}$

Puisque : $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x \in]1;+\infty[$ alors $\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exercice17 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $(4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$

2) En déduire que f est bornée

Solution :1) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $(4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $(4x+3)^2 - 25(x^2+1) = 16x^2 + 24x + 9 - 25x^2 - 25 = -9x^2 + 24x - 16 = -(9x^2 - 24x + 16)$

Donc : $(4x+3)^2 - 25(x^2+1) = -(3x-4)^2 \leq 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $(4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$

2) Déduisons que f est bornée

Soit $x \in \mathbb{R}$: On a : $(4x+3)^2 \leq 25(x^2+1)$ donc : $\sqrt{(4x+3)^2} \leq \sqrt{25(x^2+1)}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$; $|4x+3| \leq 5|x^2+1|$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\frac{|4x+3|}{\left|\sqrt{x^2+1}\right|} \leq 5$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left|\frac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}\right| \leq 5$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq 5$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-5 \leq f(x) \leq 5$

Conclusion : f est bornée

Exercice18 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

2) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - 4$

$f(x) = (x+\sqrt{x})^2 - 4$ Donc : $f(x) + 4 = (x+\sqrt{x})^2 \geq 0$

Donc : $f(x) + 4 \geq 0$ par suite : $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc : $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x+\sqrt{x})^2 - 4 \leq M \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x+\sqrt{x})^2 \leq M + 4$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+} : x+\sqrt{x}\leq\sqrt{M+4}$ (On peut toujours supposer $M\geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+} : \left(\sqrt{x}\right)^{2}+2\times\frac{1}{2}\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\leq\sqrt{M+4}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+} : \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^{2}\leq\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+} : \sqrt{x}\leq\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^{+} : x\leq\left(\sqrt{\sqrt{M+4}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^{2}$ Absurde

Donc : f est non majorée

Exercice19 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^{2}+2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$ Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2+2$

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$

b) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$

4) Dresser le tableau de variation de f

5) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $0\leq f(x)$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$ On a : $0\leq f(x)\leq 16$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $1\leq f(x)\leq 16$

6)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

7)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=x+3$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

8)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

9) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

10) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :
$-x^{2}-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=x^{2}+2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(x_2^{2}+2x_2+1\right)-\left(x_1^{2}+2x_1+1\right)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^{2}+2x_2+1-x_1^{2}-2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_2^{2}-x_1^{2}+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2)}{x_2-x_1}$$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : $T(x_1;x_2) = x_1 + x_2 + 2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I = [-1;+\infty[$

Soients : $x_1 \in [-1;+\infty[$ et $x_2 \in [-1;+\infty[$ alors : $x_1 \geq -1$ et $x_2 \geq -1$ et $x_1 \neq x_2$ donc : $x_1 + x_2 > -2$

Par suite : $x_1 + x_2 + 2 > 0$.

Donc $T(x_1;x_2) > 0$ d'où : f est strictement croissante sur $I = [-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J =]-\infty;-1]$

Soients : $x_1 \in]-\infty;-1]$ et $x_2 \in]-\infty;-1]$ alors : $x_1 \leq -1$ et $x_2 \leq -1$ et $x_1 \neq x_2$

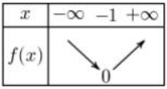
Cela implique $x_1 + x_2 < -2$

Par suite : $x_1 + x_2 + 2 < 0$.

Donc $T(x_1;x_2) < 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1) = (-1)^2 + 2\times(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$



5) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-1) = 0$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(-1) \leq f(x)$

Par suite : $0 \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Soit : $x \in [-1;3]$ alors : $-1 \leq x \leq 3$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I = [-1;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;3]$

Alors : $f(-1) \leq f(x) \leq f(3)$ et comme : $f(-1) = 0$ et $f(3) = 3^2 + 2\times 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$

Par suite : $0 \leq f(x) \leq 16$

b) Soit : $x \in [-5;-2]$ On a alors : $-5 \leq x \leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J =]-\infty;-1]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(-5)$ et comme :

$f(-5) = (-5)^2 + 2\times(-5) + 1 = 25 - 10 + 1 = 16$ Et $f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$

Par suite : $1 \leq f(x) \leq 16$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x) = 0$.

PROF: ATMANI NAJIB

$f(x)=0$ Signifie $x^2+2x+1=0$

Signifie : $(x+1)^2=0$

Signifie : $x+1=0$ c'est-à-dire : $x=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(-1;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

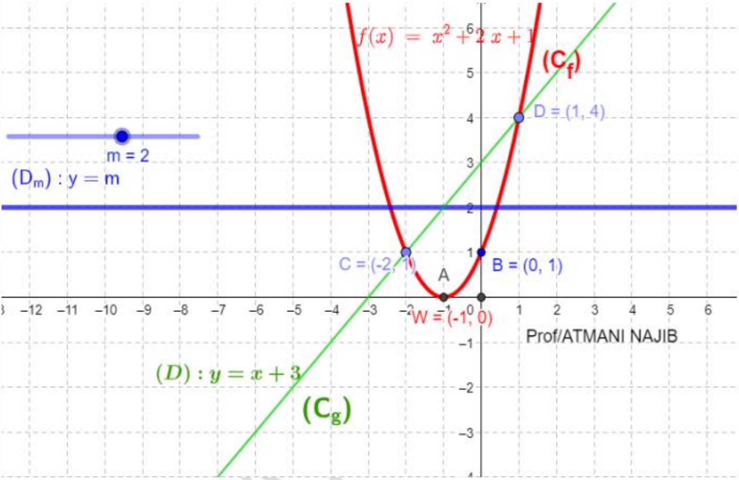
Et on a $f(0)=0^2+2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $B(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	4	1	0	1	4	9

x	-2	1
g(x)	1	4



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=1$ donc $S=\{-2;1\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2+2x+1=x+3$ c'est-à-dire : $x^2+x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times1=1+8=9>0$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Donc : $S=\{-2;1\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x)<f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessous de (C_f) si $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x)<f(x)$:

$g(x)<f(x)$ Signifie $x+3<x^2+2x+1$

C'est-à-dire : $x^2+x-2>0$

Les racines sont : $x_1=1$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+	

Donc $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $-x^2-2x+m-1=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

$-x^2-2x+m-1=0$ Signifie $m=x^2+2x+1$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y=m$

Si : $m<0$ l'équation n'admet pas de solution

Si : $m=0$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m>0$ il y'a deux solutions

Exercice20: Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$ et $g(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

1) Déterminer : D_f et D_g

2) Déterminer la fonction $g\circ f$

3) Déterminer la fonction $f\circ g$

Solution : 1) →On a : $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-x>0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x2-x$		+	0	−	0	+	

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Donc : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

→On a : $x\in D_g \Leftrightarrow x^2+1\neq0$ toujours vérifier

PROF: ATMANI NAJIB

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Donc : $D_g = \mathbb{R}$

2) Déterminons la fonction $g \circ f$

$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_f \;\; et \;\; f(x) \in D_g\}$

$x \in D_{g\circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \;\; et \;\; f(x) \in D_g \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[\;\; et \;\; f(x) \in \mathbb{R}$

$x \in D_{g\circ f} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

Donc : $D_{g\circ f} = \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2+1} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2+1} = \frac{\frac{1}{x^2-x}}{\frac{1}{x^2-x}+1} = \frac{\frac{1}{x^2-x}}{\frac{x^2-x+1}{x^2-x}} = \frac{1}{x^2-x+1}$$

Donc : $(g\circ f)(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$; $\forall x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

2) Déterminons la fonction $f \circ g$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_g \;\; et \;\; g(x) \in D_f\}$

$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in D_g \;\; et \;\; g(x) \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\; et \;\; \frac{x^2}{x^2+1} \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\; et \;\; \frac{x^2}{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\; et \;\; x^2 > x^2+1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\; et \;\; 0 > 1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Donc : $D_{f\circ g} = \varnothing$ et la fonction $f \circ g$ n'est pas définie

Exercice21 : Soit les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & si \; x \le 3 \\ 3 & si \; x > 3 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} x^2-10 & si \; x > 1 \\ x-5 & si \; x \le 1 \end{cases}$

Calculer : $(f\circ g\circ f)(7)$

Solution : 1) →On a :

$(f\circ g\circ f)(7) = (f\circ g)(f(7)) = (f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(3^2-10) = f(-1) = 5\times(-1)-4 = -9$

Exercice 22 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x) = \sqrt{x-1}$ et $f(x) = -x^2+2x+1$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;1)$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2-2x-1+\sqrt{x-1} \prec 0$

5) Déterminer graphiquement les images de $[0;1]$ et $[1;2]$ pat f

6) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

a) Déterminer D_h

b) Vérifier que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in D_h$

c) Étudier la monotonie de h dans: $[0;1]$ et $[1;2]$

Solution : 1) $f(2)=g(2)=1\Rightarrow\ A(2;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

2) Déterminons les tableaux de variations de f et g

Pour : $g(x)=\sqrt{x-1}\quad D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}=[1,+\infty[$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

Pour : $f(x)=-x^2+2x+1$; On a f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

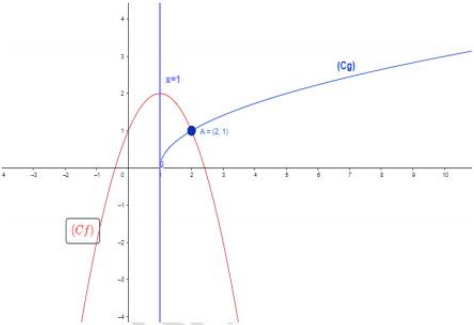
On utilisant le résumé de notre cours :

On a : $a=-1\prec 0$ et $b=2$ et $c=1\quad (f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$ et $f(\alpha)=f(1)=-(1)^2+2\times 1+1=2$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	



3) Traçage des courbes (C_f) (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Résolution graphique de l'inéquation $x^2-2x+2+\sqrt{x-1}\prec 0$:

$x^2-2x-1+\sqrt{x-1}\prec 0\Leftrightarrow$

$\sqrt{x-1}\prec -x^2+2x+1\Leftrightarrow g(x)\prec f(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[-4;-1[\cup[0;+\infty[$

Donc : $S=]1;2[$

5) Détermination graphique des images de $[0;1]$ et $[1;2]$ pat f

$f([0;1])=[1;2]$ et $f([1;2])=[1;2]$

6) On considère la fonction h tel que : $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+2x\geq 0\}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_h=[0;2]$

b) Vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)\ \ \forall x\in D_h$; On a : : $g(x)=\sqrt{x-1}$ et $f(x)=-x^2+2x+1$

Donc : $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{-x^2+2x+1-1}=\sqrt{-x^2+2x}=h(x)$; $\forall x\in[0;2]$

c) Etude de la monotonie de h dans : $[0;1]$ et $[1;2]$

On a : $h(x)=(g\circ f)(x)$

Puisque f est croissante sur $[0;1]$ et $f([0;1])=[1;2]$ et g est croissante sur $[1;2]$ alors $g\circ f$ est croissante sur $[0;1]$

Puisque f est décroissante sur $[1;2]$ et $f([1;2])=[1;2]$ et g est croissante sur $[1;2]$ alors $g\circ f$ est décroissante sur $[1;2]$

Exercice23 : Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=x^3$ et $f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$

(C_f) ; (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Montrer que : $A(1;1)$ et $B(2;8)$ sont des points d'intersections de (C_f) et (C_g)

2) Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.

3) Déterminer le tableau de variations de g

4) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{9x-10}{2x-3}\leq x^3$

Solution : 1) $A(1;1)$ et $B(2;8)$:

$f(1)=g(1)=1\Rightarrow A(1;1)\in(C_f)\cap(C_g)$

$f(2)=g(2)=2\Rightarrow B(2;2)\in(C_f)\cap(C_g)$

2) 1) $f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\frac{3}{2}\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Étudions les variations de f et donner son tableau de variation.

En générale si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$ donc (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=\frac{3}{2}$ et $y=\frac{9}{2}$

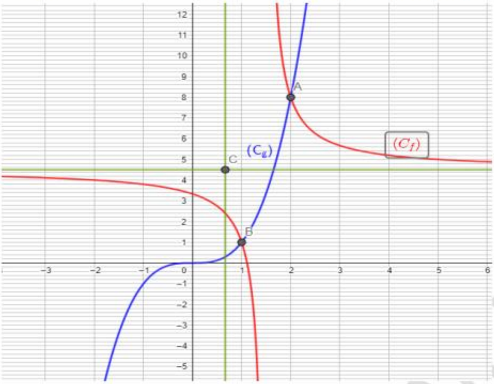
$f(x)=\frac{9x-10}{2x-3}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}9 & -10\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-27+20=-7<0$

Donc :f est strictement décroissante sur : $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

3)Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↗	

4)Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$: g est impaire



x	0	1	2
$g(x)$	0	1	8

5) Résolution graphique sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $\frac{9x-10}{2x-3}\le x^3$

$\frac{9x-10}{2x-3}\le x^3 \Leftrightarrow f(x)\le g(x)$: Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessous de (C_g) si $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right[\cup[2;+\infty[$ Donc : $S=\left[1;\frac{3}{2}\right[\cup[2;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: A

Exercice24 : Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) - 5$

1) Calculer : $f(6)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $f(x) = 5$

Solutions : 1) $f(6) = E\left(\frac{1}{2}(6+3)\right) - 5 = E\left(\frac{9}{2}\right) - 5 = E\left(\frac{8+1}{2}\right) - 5 = E\left(\frac{8}{2} + \frac{1}{2}\right) - 5 = E\left(4 + \frac{1}{2}\right) - 5 = 4 + E\left(\frac{1}{2}\right) - 5$

On a : $0 \leq \frac{1}{2} < 0+1$ donc $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ par suite : $f(6) = 4 + 0 - 5 = -1$

2) $f(x) = 5 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) - 5 = 5 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) = 10$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\forall p \in \mathbb{Z}$: $E(x) = p \Leftrightarrow p \leq x < p+1$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) = 10 \Leftrightarrow 10 \leq \frac{1}{2}(x+3) < 10+1 \Leftrightarrow 20 \leq x+3 < 22 \Leftrightarrow 20-3 \leq x < 22-3 \Leftrightarrow 17 \leq x < 19$

D'où : $S = [17;19[$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien