http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°2 : Généralités sur les fonctions

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^4-2025}{6x^2-x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$ 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

4) $f(x)=\dfrac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$ 5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$ 6) $f(x)=\sqrt{2|x|-3}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{x^4-2025}{6x^2-x-1}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,6x^2-x-1\neq 0\right\}$

$6x^2-x-1$: On a : $\Delta=1+24=25$: $x_1=\dfrac{1+5}{12}=\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1-5}{12}=-\dfrac{1}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2-4x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+1\geq 0 \;\; et \;\; 2-4x\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2-4x\neq 0\right\}$ car $x^2+1\geq 0$ (toujours vraie)

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-4x\neq -2\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\dfrac{-2}{-4}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x+1\geq 0 \;\; et \;\; x\neq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -1 \;\; et \;\; x\neq 0\right\}$

$D_f=[-1;+\infty[-\{0\}=[-1;0[\cup]0;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{3x^2+|x|-1}{\sqrt{16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}}}$: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,16x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{1}{9}\geq 0\right\}$

Calculons le discriminant du trinôme $16x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{1}{9}$: $a=16$; $b=-\dfrac{8}{3}$; $c=\dfrac{1}{9}$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2-4\times 16\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{64}{9}-\dfrac{64}{9}=0$

Comme $\Delta = 0$, trinôme possède une seule racine (dite double) : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{8}{3}}{2\times 16} = \frac{1}{12}$

Le tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$16x^2-\frac{8}{3}x+\frac{1}{9}$		+	0	+	

Donc : $D_f = \left]-\infty;\frac{1}{12}\right[\cup \left]\frac{1}{12};+\infty\right[$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5}}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-3x^2+x+5}{2x^2+x-5} \geq 0 \ \ et \ \ 2x^2+x-5 \neq 0 \right\}$$

Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur puis regrouper les résultats dans un tableau de signes. Pour le numérateur : $\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 5 = 1+20 = 21$;

Delta est positif donc l'équation du deuxième degré possède deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{21}}{-2} = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \simeq 2,8$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{21}}{-2} = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \simeq -1,8$

Le coefficient devant x² est négatif donc le numérateur est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines. De même, pour le dénominateur : $\Delta = 1^2 - 4\times(-5)\times 2 = 1+40 = 41$

Donc : $x_1' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{41}}{4} \simeq -1,9$ et $x_2' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{41}}{4} \simeq 1,4$

Le coefficient devant x² est positif donc le dénominateur est négatif entre ses racines.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$		$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+5$		−		−	0	+		+	0	−	
$2x^2+x-5$		+	0	+		−	0	+		+	
$\frac{-x^2+x+5}{2x^2+x-5}$		−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	

Donc : $D_f = \left]\frac{-1-\sqrt{41}}{4};\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left]\frac{-1+\sqrt{41}}{4};\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right]$

6) $f(x) = \sqrt{2|x|-3}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x|-3 \geq 0\}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / |x| \geq \frac{3}{2} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{3}{2} \ \ ou \ x \leq -\frac{3}{2} \right\}$$

Donc : $D_f = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

ATMANI NAJIB

Exercice 2 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\cos x - x^2}{x+1} & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-4} & si \quad x > 0 \end{cases}$

Déterminer D_f

Solution : *Remarque :* $\begin{cases} f(x) = f_1(x) & si \quad x \in I_1 \\ f(x) = f_2(x) & si \quad x \in I_2 \end{cases}$ Alors : $D_f = (D_{f_1} \cap I_1) \cup (D_{f_2} \cap I_2)$

On pose : $f_1(x) = \dfrac{2\cos x - x^2}{x+1}$ et $I_1 =]-\infty;0]$ et $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-4}$ et $I_2 =]0;+\infty[$

$D_{f_1} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ et $D_{f_2} =]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

$D_{f_1} \cap I_1 =]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ et $D_{f_2} \cap I_2 =]0;2[\cup]2;+\infty]$

Donc : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0] \cup]0;2[\cup]2;+\infty]$

Donc : $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[= \mathbb{R} - \{-1;2\}$

Exercice3 : Soient les deux fonctions : $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x^4+8x^2+2}}{\sqrt{4x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{2}|x|}$

Comparer les fonctions f et g

Solution :

- On a : $x \in D_f \Leftrightarrow 4x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^*$

- On a : $x \in D_g \Leftrightarrow |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}^*$

Alors : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

- Soit : $x \in \mathbb{R}^*$

On sait que $\sqrt{4x^2} = 2\sqrt{x^2} = 2|x|$ et

$$8x^4+8x^2+2 = 2\left(4(x^2)^2+4x^2+1\right) = 2\left((2x^2)^2+2\times 2x\times 1+1^2\right) = 2(2x^2+1)^2$$

Donc : $f(x) = \dfrac{\sqrt{8x^4+8x^2+2}}{\sqrt{4x^2}} = \dfrac{\sqrt{2(2x^2+1)^2}}{2|x|} = \dfrac{\sqrt{2}|2x^2+1|}{2|x|} = \dfrac{|2x^2+1|}{\sqrt{2}|x|} = g(x)$

Donc : $f(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Finalement / on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et $f(x) = g(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc : $f = g$

Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

PROF: ATMANI NAJIB

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$ .Conclure

Solution : 1) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\right\}$

$\Delta = -3 \prec 0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7 - 1\left(x^2 + 3x + 3\right)}{x^2 + 3x + 3} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3}$

$f(x) - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3}$ Or $x^2 + 3x + 3 \succ 0$ car $\Delta = -3 \prec 0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+2)^2 \geq 0$ donc $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 1$

2) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) - \frac{7}{3} = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} = \frac{-x^2}{3\left(x^2 + 3x + 3\right)} \leq 0$

Par suite f est majorée par $\frac{7}{3}$.

Conclusion : $1 \prec f(x) \leq \frac{7}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice5 : Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$

Montrer que : g est Bornée.

Solution : On a $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

Donc $-4 - 3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4 - 3$

donc $-7 \leq g(x) \leq 1$

Donc : g est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

Montrer que f admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera

Solution : 1) a) On a $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5 = -4\left(x^2 - x\right) + 5 = -4\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 5 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 + 5 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 6$$

Donc : $f(x) - 6 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$

Donc : $f(x) \leq 6$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 6 \Leftrightarrow f(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Donc : $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : 6 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice7 : Vérifier que f est périodique et T est une période de f dans chacune des cas suivants et donner un domaine d'étude de f : D_E

1) $f(x)=2\sin x-5\cos 2x \quad : \quad T=2\pi$

2) $f(x)=\sin 2x-7\cos 4x \quad : \quad T=\pi$

3) $f(x)=6\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2} \ : \ T=\pi$

4) $f(x)=6\sin 6x-\frac{1}{3}\tan 3x \ : \ T=\frac{\pi}{3}$

Solution : 1) $f(x)=2\sin x-5\cos 2x \quad : \quad T=2\pi \ ; \ D_f=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$:

$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)-5\cos(2(x+2\pi))=2\sin x-5\cos(2x+4\pi)=2\sin x-5\cos(2x)=f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et 2π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et 2π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E=[0,2\pi]\cap\mathbb{R}=[0,2\pi]$

2) $f(x)=\sin 2x-7\cos 4x \quad : \quad T=\pi \ ; \ D_f=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$:

$f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)-7\cos(4(x+\pi))=\sin(2x+2\pi)-7\cos(4x+4\pi)=\sin 2x-7\cos(4x)=f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E=[0,\pi]\cap\mathbb{R}=[0,\pi]$

3) $f(x)=6\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2} \ : \ T=\pi \ ; \ D_f=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x+\pi)=6\sin\left(2(x+\pi)-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=6\sin\left(2x+2\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=6\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=f(x)$

Car on sait que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et π est une période de f

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :

$D_E=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cap\mathbb{R}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

4) $f(x)=6\sin 6x-\frac{1}{3}\tan 3x \ : \ T=\frac{\pi}{3}$

$x\in D_f \Leftrightarrow 3x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Soit $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$f(x+\pi)=6\sin\left(6(x+\pi)\right)-\frac{1}{3}\tan\left(3(x+\pi)\right)=6\sin(6x+6\pi)-\frac{1}{3}\tan(3x+3\pi)=6\sin 6x-\frac{1}{3}\tan 3x=f(x)$$

Car on sait que la fonction Sinus est périodique de période 2π et tan est périodique de période π
Donc : f est périodique et π est une période de f
Comme : f une fonction périodique et π est une période de f on choisit un intervalle d'étude :
$D_E=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cap D_f$

Exercice8 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$ et paire
Tel que : $f(x)=x \quad \forall x\in[0,1]$

1) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{7}{2}\right)$; $f(2027)$; $f\left(-\frac{2006}{3}\right)$

2)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I=[-5;5]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

Solution : 1) → on a : $\frac{1}{2}\in[0,1]$ donc : $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\rightarrow f\left(-\frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}-4\right)=f\left(-2\times2+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ car f est périodique de période $T=2$

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow f(2027)=f(1+2026)=f(2\times1013+1)=f(1)=1$ car f est périodique de période $T=2$ et $1\in[0,1]$

En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$\rightarrow f\left(-\frac{2006}{3}\right)=f\left(-\frac{2}{3}-668\right)=f\left(-\frac{2}{3}-2\times334\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ car f est périodique de période $T=2$

et $\frac{2}{3}\in[0,1]$: En effet : $f(k\times T+x)=f(x)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) f une fonction paire donc l'axe des ordonnées c'est un axe de symétrie de (C_f)

Dans l'intervalle $I_0'=[0,1]$: On a : f est une fonction linéaire

Donc la courbe de f (C_f) c'est un segment.

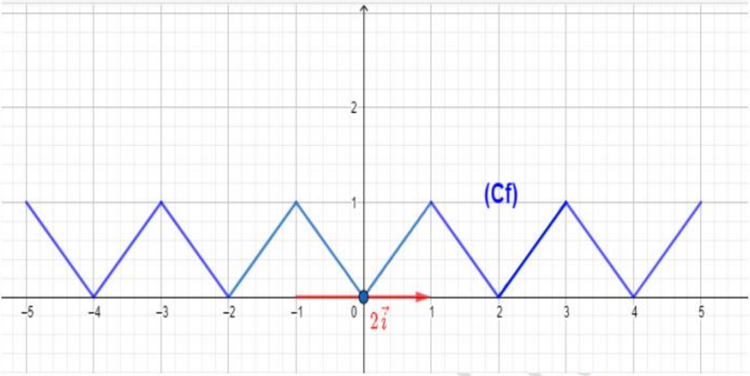
Soit (C_0) la courbe de f dans l'intervalle $I_0=[-1,1]$ et (C_k) la courbe de f dans l'intervalle $I_k=[-1+2k,1+2k]$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I=[-5;5]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $I_0=[-1,1]$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Pour tracer (C_k)

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB



Exercice9 : Etudier les variations des fonctions définies par : 1) $f(x) = -2x - 100$ 2) $g(x) = \dfrac{-4}{x}$

3) $h(x) = -2x^3 + 2027$ 4) $k(x) = 2001\sqrt{x-2} + 2024$

Solution : 1) $f(x) = -2x - 100$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v : x \to x$

On sait que la fonction $v : x \to x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $-2 < 0$ donc la fonction $-2v$ est aussi décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f = -2v + (-100)$ aussi décroissante sur $\mathbb{R}$

2) $g(x) = \dfrac{-4}{x}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$

On sait que : $v : x \to \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $g = -4v$

Alors : g est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-4 < 0$

3) $h(x) = -2x^3 + 2027$ et $D_f = \mathbb{R}$: On sait que : $v : x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a : $h = -2v + 2027$

Puisque la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $-2v$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $h = -2v + 2027$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-2 < 0$

4) $k(x) = 2001\sqrt{x-2} + 2024$: $D_k = [2;+\infty[$

Puisque la fonction $v : x \to \sqrt{x-2}$ est croissante sur $[2;+\infty[$

Donc : $k = 2001v + 2024$ est croissante sur $[2;+\infty[$ car $2001 > 0$

PROF: ATMANI

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice10 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f.

2) Montrer que la fonction f est impaire

3) Calculer $f(-1)$ et Montrer que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I=[0;1]$ et $J=[1;+\infty[$.

5) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solutions : 1) $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E\,/\,x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : x^2+1 ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{-10(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{-10x}{x^2+1}$ Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) Calculons $f(-1)$:

$$f(-1)=\frac{-10\times(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{10}{2}=5$$

Montrons que 5 est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{-10x}{x^2+1}$: Soit $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)-5=\frac{-10x}{x^2+1}-5=\frac{-10x-5(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{-10x-5x^2-5}{x^2+1}=-5\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Puisque : $-5\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\leq 0$ alors : $f(x)\leq 5$ et on a aussi : $f(-1)=5$

Alors : $f(x)\leq f(-1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On conclut que : $f(-1)=5$ est une valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

4) a) Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

PROF: ATMANI NAJIB

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{-10x_1}{x_1^2+1}+\dfrac{10x_2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{-10x_1(x_2^2+1)+10x_2(x_1^2+1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-10x_1(x_2^2+1)+10x_2(x_1^2+1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{-10x_1x_2^2-10x_1+10x_2x_1^2+10x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10(-x_1x_2^2-x_1+x_2x_1^2+x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10(x_2-x_1+x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10(x_1x_2(x_1-x_2)-(x_1-x_2))}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{10(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\times\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

b)

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=[0;1]$

Soient : $x_1\in[0;1]$ et $x_2\in[0;1]$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $(1+x_1^2)(1+x_2^2)>0$ et $10>0$

Donc : $\begin{cases}0\leq x_1\leq 1\\0\leq x_2\leq 1\end{cases}$ alors : $0\leq x_1x_2\leq 1$

Donc : $x_1x_2-1\leq 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $0\leq x_1x_2<1$

D'où : $T(x_1;x_2)=\dfrac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0$

Et par suite f est strictement décroissante sur $I=[0;1]$

• Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J=[1;+\infty[$

On a : $(1+x_1^2)(1+x_2^2)>0$ et $10>0$

Soient : $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$ tel que : $x_1\neq x_2$

Donc : $\begin{cases}x_1\geq 1\\x_2\geq 1\end{cases}$ alors : $x_1x_2\geq 1$

Donc : $x_1x_2-1\geq 0$ et puisque $x_1\neq x_2$ alors : $x_1x_2-1>0$

D'où : $T(x_1;x_2)=\dfrac{10(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}>0$

Et par suite f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

5) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

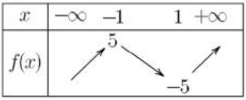
On a f est une fonction impaire

▷ Puisque f est strictement décroissante sur $I=[0;1]$ alors f l'est aussi sur $I'=[-1;0]$

PROF: ATMANI NAJIB

⊳ Puisque f est strictement croissante sur $J = [1;+\infty[$ alors f l'est aussi sur $J' =]-\infty;1]$

D'où, le tableau de variation de f

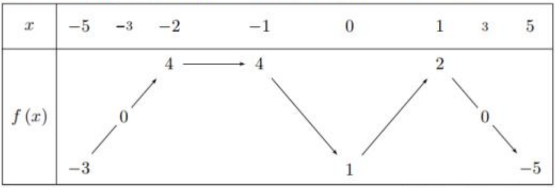

x
$-\infty$
-1
1
$+\infty$
$f(x)$
5
-5

Exercice11 : À partir du tableau de variation ci-dessous, recopier et compléter les égalités ou inégalités suivantes en justifiant :

1) a) $f(1,9).....f(3,8)$ b) $f(-4,2).....f(-2,7)$ c) $f(-1,8).....f(-1,4)$

2) Peut-on comparer l'image des nombres $-1,7$ *et* $1,5$? Justifier.

3) Peut-on comparer l'image des nombres $-0,6$ *et* $-4,8$? Justifier.


x
-5
-3
-2
-1
0
1
3
5
$f(x)$
-3
0
4
4
1
2
0
-5

Solution :1) a) $f(1,9) > f(3,8)$) car 1,9 < 3,8 et f est décroissante sur [1 ; 5].

b) $f(-4,2) < f(-2,7)$ car -4,2< -2,7 et f est croissante sur [-5 ; -2].

c) $f(-1,8) = f(-1,4)$ car -1,8 < -1,4 et f est constante sur [-2 ; -1].

2) On ne peut pas comparer f (−1,7) et f (1,5) car la fonction f n'est pas monotone (elle change de sens de variation) sur [−1,7 ; 1,5].

3) $f(-0,6) > f(-4,8)$ car d'après le signe de la fonction $f(-0,6) > 0$ et $f(-4,8) < 0$ (par contre, on ne peut pas utiliser le sens de variation qui change sur l'intervalle [−4,8 ; −0,6]).

Exercice12 : Soit f une fonction tel que : $f(x) = \frac{-x+3}{x+1}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) a) Montrer que (C_f) est une hyperbole et déterminer son centre et ses asymptotes

b) Déterminer le tableau de variations de f et tracer la courbe (C_f)

3) Soit g une fonction tel que : $g(x) = \frac{-|x|+3}{|x|+1}$

a) Déterminer D_g

b) Etudier la parité de g

c) Tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF: ATMANI NAJIB

d) Déterminer le tableau de variations de g

Solutions : $f(x)=\frac{-x+3}{x+1}$

1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x+1\neq 0$ signifie $x\neq -1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

2)a)On utilisant le résumé de notre cours :

Si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\text{Det}(f)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors f est strictement croissante

2iér cas : si $\text{Det}(f)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors f est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $f(x)=\frac{-x+3}{x+1}$ Avec : $a=-1$; $b=3$; $c=1$; $d=1$

Donc : (C_f) est une hyperbole de centre $W(-1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\frac{1}{1}=-1$ et $y=\frac{-1}{1}=-1$

$$\text{Det}(f)=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\times(-1)-1\times 3=-4<0$$

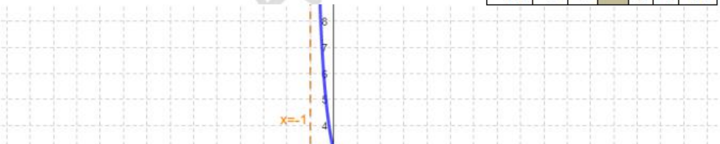
Donc : f est strictement décroissante sur les intervalles : $\left]-\infty;-1\right[$ *et* $\left]-1;+\infty\right[$

b) Le tableau de variations de f :

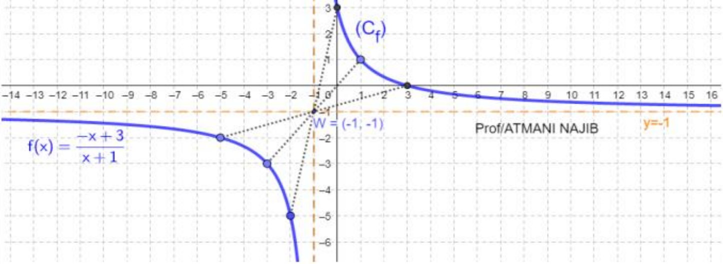
x	$-\infty$ -1 $+\infty$	
$f(x)$	↘	↘

La courbe (C_f) :

- 4	- 3	-2	-1	0	1	2
-7/3	-3	-5	▨	3	1	1/3



ATMANI NAJIB



3) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}$

On a : $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|+1\neq 0$

Signifie $|x|\neq -1$ Par suite : $D_g=\mathbb{R}$

b) Etudions la parité de g :

☞ si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

$-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\dfrac{-|-x|+3}{|-x|+1}=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $g(-x)=g(x)$ Par suite : g est paire

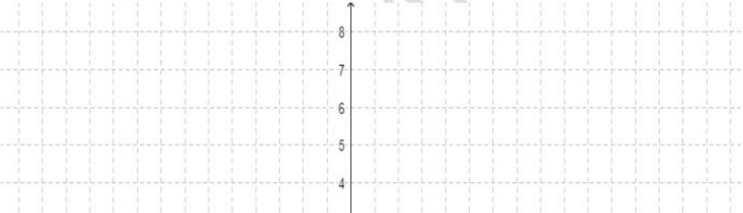
c)La courbe (C_g) : Puisque g est paire alors la courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

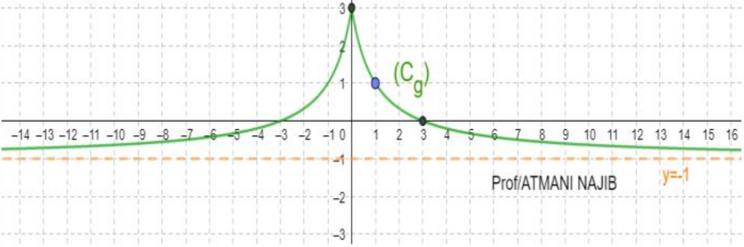
On représente alors (C_g) sur $[0;+\infty[$ et trace son symétrique sur $]-\infty;0]$

Or sur $[0;+\infty[$: on a $g(x)=\dfrac{-|x|+3}{|x|+1}=\dfrac{-x+3}{x+1}=f(x)$

Donc la courbe (C_g) est:

ANI NAJIB





d) d'après la courbe représentative de g on déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$g(x)$	↗ 3 ↘

Exercice13 : Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=\frac{1}{3}(x^2-4x+6)$ et $g(x)=\sqrt{x}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

3) a) Vérifier que : $g(1)=f(1)$ et $g(4)=f(4)$

b) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

4) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;4]$; $[2;+\infty[$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2-4x+3(2-\sqrt{x})<0$

Solution :) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+2$; f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=\frac{1}{3}$ et $b=-\frac{4}{3}$ et $c=2$ donc : $\alpha=-\frac{-\frac{4}{3}}{2\frac{1}{3}}=2$ $f(2)=\frac{2}{3}$

La courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S\left(2;\frac{2}{3}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

Tableau de variations de f : On a $a=\frac{1}{3}>0$ donc :

ATMANI NAJIB

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f(x)$	↘ $\frac{2}{3}$ ↗

1) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation : $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x^2-4x+6)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times6=16-24=-8<0$: Pas de solutions

Donc : la courbe (C_f) ne coupe pas l'axe des abscisses

b) Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées :

$f(0)=\frac{1}{3}(0^2-4\times0+6)=2$ $x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc : Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $A(0;2)$

3) a) Vérifions que : $g(1)=f(1)$ et $g(4)=f(4)$

$f(1)=\frac{1}{3}(1^2-4\times1+6)=1$ et $g(1)=\sqrt{1}=1$

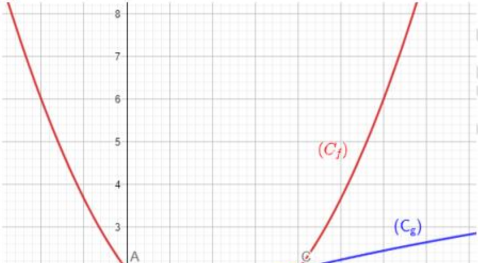
Donc : $g(1)=f(1)$

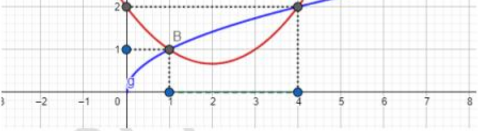
$f(4)=\frac{1}{3}(4^2-4\times4+6)=\frac{1}{3}(16-16+6)=2$ et $g(1)=\sqrt{4}=2$

Donc : $g(4)=f(4)$

Graphiquement : (C_f) et (C_g) se coupent et les points : $B(1;1)$ et $C(4;2)$

b)





4) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;4]$; $[4;+\infty[$

$g([1;4])=[1;2]$ et $g(\ [4;+\infty[)=[2;+\infty[$

5) Résolvons graphiquement l'inéquation : $x^2-4x+3\left(2-\sqrt{x}\right)<0$

Soit : $x\in\mathbb{R}^+$; $x^2-4x+3\left(2-\sqrt{x}\right)<0 \Leftrightarrow x^2-4x+6-3\sqrt{x}<0 \Leftrightarrow x^2-4x+6<3\sqrt{x}$

$x^2-4x+3\left(2-\sqrt{x}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x^2-4x+6\right)<\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

Graphiquement la courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x\in]1;4[$

Donc : $S=]1;4[$

Exercice14 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1) Montrer que : $1\le f(x)<2$: $\forall x\in\mathbb{R}$

2)Soient U et V deux fonctions définies par : $U(x)=x^2+2x$ et $V(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

a) Donner le tableau de variation de U et V

b) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;-1]$ et $[-1;+\infty[$

c) Déterminer les extrémums de la fonction f

Solution :1) Montrons que : $1\le f(x)<2$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $\to f(x)-1=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\dfrac{2x^2+4x+3-x^2-2x-2}{x^2+2x+2}=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}$

On a : $x^2+2x+2>0$ car : $\Delta=-4<0$ et $a=1>0$ et puisque : $(x+1)^2\ge 0$

Alors : $f(x)-1\ge 0$

Alors : $1\le f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

: $\to f(x)-2=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\dfrac{2x^2+4x+3-2x^2-4x-4}{x^2+2x+2}=\dfrac{-1}{x^2+2x+2}<0$ car $x^2+2x+2>0$

Alors : $f(x)<2$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : $1\le f(x)<2$: $\forall x\in\mathbb{R}$

2)Soient U et V deux fonctions définies par : $U(x)=x^2+2x$ et $V(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

PROF ATMANI NAJIB

a) →le tableau de variation de U : $U(x)=x^2+2x$; $D_U=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=2$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times1}=-1$ Et $\beta=U(\alpha)=U(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_U\right)$ c'est une parabole de sommet $W(-1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=-1$

→le tableau de variation de V : $V(x)=\frac{2x+3}{x+2}$; on a $V(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x+2\neq0 \Leftrightarrow x\neq-2$

Donc : $D_V=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0$

$\left(C_V\right)$ est l'hyperbole de centre $W'(-2;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-2$ et $y=2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$V(x)$		↗	‖	↗	

b) →Etudions la monotonie de f dans l'intervalle : $]-\infty;-1]$

On peut vérifier que : $f(x)=(V\circ U)(x) \quad \forall x\in D_f$

Puisque U est décroissante sur $]-\infty;-1]$ et $\forall x\in]-\infty;-1]:U(x)\in[-1;+\infty[$ et V est croissante sur $[-1;+\infty[$ alors $f=V\circ U$ est décroissante sur $]-\infty;-1]$

→Etudions la monotonie de f dans l'intervalle : $[-1;+\infty[$

Puisque U est croissante sur $[-1;+\infty[$ et $\forall x\in[-1;+\infty[:U(x)\in[-1;+\infty[$ et V est croissante sur $[-1;+\infty[$ alors $f=V\circ U$ est croissante sur $[-1;+\infty[$

c) Déterminer les extrémums de la fonction f

→le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

→Le nombre 1 est le minimum absolu de f en -1

Exercice15 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+x+6$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x)\geq\frac{1}{2}$

3) Etudier la monotonie de $f\circ f$ sur $\mathbb{R}$

4) Calculer $(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2+x+6$

1) Dressons le tableau de variations de la fonction f

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

$\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$ On a : $a = -1 < 0$ et $b = 1$ et $c = 6$ donc : $\alpha = -\frac{-1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4}$

La courbe $\left(C_f\right)$ c'est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$; $S\left(\frac{1}{2};\frac{25}{4}\right)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$ C'est-à-dire : $x = \frac{1}{2}$

Tableau de variations de f : on a $a = -1 < 0$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{25}{4}$	↘

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \geq \frac{1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -x^2 + x + \frac{11}{2} \geq 0$

$a = -1$ et $b = 1$ et $c = \frac{11}{2}$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-1) \times \frac{11}{2} = 1 + 22 = 23 > 0$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{23}}{2\times(-1)} = \frac{-1+\sqrt{23}}{-2} = \frac{1-\sqrt{23}}{2}$ Et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{23}}{2\times(-1)} = \frac{-1-\sqrt{23}}{-2} = \frac{1+\sqrt{23}}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{23}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{23}}{2}$	$+\infty$
$-x2+x+\frac{11}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc : $S = \left[\frac{1-\sqrt{23}}{2}, \frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$

3) Etudions la monotonie de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{23}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{23}}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{25}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$	↘

→Sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$: Puisque f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$ et

$\forall x \in \left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]: f(x)\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ c'est-à-dire : $f\left(\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]\right)\subset\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et comme f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f\circ f$ est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{23}}{2}\right]$

→Sur $\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$:

Puisque f est croissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]: f(x)\geq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire :

$f\left(\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et comme f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : $f\circ f$ est décroissante sur $\left[\frac{1-\sqrt{23}}{2};\frac{1}{2}\right]$

→Sur $\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$: Puisque f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$ et $\forall x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]: f(x)\geq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $f\left(\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]\right)\subset\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et comme f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ alors : $f\circ f$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{23}}{2}\right]$

→Sur $\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[$: Puisque f est décroissante sur $\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[$ et $\forall x\in\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[: f(x)\leq\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $f\left(\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[\right)\subset\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et comme f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f\circ f$ est décroissante sur $\left[\frac{1+\sqrt{23}}{2};+\infty\right[$

Tableau de variations de $f\circ f$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{23}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{23}}{2}$		$+\infty$
$(f0f)(x)$		↗	...	↘	...	↗	...	↘	

4) Calculons : $(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Soit : $x\in\mathbb{R}$: $(f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=-f(x)^2+f(x)+6=-\left(-x^2+x+6\right)^2-x^2+x+6+6$

$(f\circ f)(x)=-\left(-x^2+(x+6)\right)^2-x^2+x+6+6$

On a : $\left((x+6)-x^2\right)^2=(x+6)^2-2x^2(x+6)+x^4=x^2+12x+36-2x^3-12x^2+x^4$

Donc : $\left((x+6)-x^2\right)^2=x^4-2x^3-11x^2+12x+36$

Donc : $(f\circ f)(x)=-x^4+2x^3+11x^2-12x-36-x^2+x+12$

Donc : $(f\circ f)(x)=-x^4+2x^3+10x^2-11x-24$

Exercice16 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x+\sqrt{x-E(x)}$

1) Calculer : $f(1)$; $f(4{,}25)$; $f(-3{,}6)$

2) Déterminer : D_f

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

Solution : 1) Calculons : $f(1)$; $f(4{,}25)$; $f(-3{,}25)$

$f(1)=-1+\sqrt{1-E(1)}=-1+\sqrt{1-1}=-1$

$f(4{,}25)=-4{,}25+\sqrt{4{,}25-E(4{,}25)}=-4{,}25+\sqrt{4{,}25-4}=-4{,}25+\sqrt{0{,}25}=-4{,}25+0{,}5=-3{,}75$

$f(-3{,}6)=3{,}6+\sqrt{-3{,}6-E(-3{,}6)}=3{,}6+\sqrt{-3{,}6-(-4)}=3{,}6+\sqrt{0{,}4}$

2) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x-E(x)\geq 0\right\}=\mathbb{R}-\{0\}$

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x$ donc : $0\leq x-E(x)$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow -x+\sqrt{x-E(x)}=0\Leftrightarrow \sqrt{x-E(x)}=x$

On sait que : $x-1\prec E(x)\leq x\Leftrightarrow 0\leq x-E(x)\prec 1$

$f(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{x-E(x)}=x\Rightarrow 0\leq x\prec 1\Rightarrow 0\leq x\prec 1\Rightarrow E(x)=0\Rightarrow \sqrt{x}=x\Rightarrow x=x^2$

$\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x=0\ ou\ x-1=0\Rightarrow x=0\ ou\ x=1$

Inversement : $f(0)=-0+\sqrt{0-E(0)}=0$ et $f(1)=-1+\sqrt{1-E(1)}=-1\neq 0$

Donc : $S = \{0\}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI