1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°3 : Généralités sur les fonctions

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$ 2) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ 4) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}}$ 6) $f(x)=\sqrt{\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$ 7) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$

8) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ 9) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Solution :1) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2-2^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$: Le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times7=25-28=-3\prec 0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2(x-1)\geq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x-1\geq 0 \ ou \ x=0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / x\geq 1 ou \ x=0\}$

Par suite : $D_f=\{0\}\cup[1;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R} / -2x^2+x+3>0\}$

$-2x^2+x+3=0$: $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc : on a deux racines : $x_1=\frac{-1+5}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\frac{-1-5}{2\times(-2)}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

5) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}\geq 0\ \ et\ \ x^2-5\neq 0\right\}$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5}\geq 0\ \ et\ \ x\neq-\sqrt{5}\ \ et\ \ x\neq\sqrt{5}\right\}$$

$2x^2-3x+1=0$: Δ = 1 > 0 donc $2x^2-3x+1=0$ admet deux solutions Distinctes $x_1=1$ et $x_2=\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$1/2$		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-5		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$q(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Par suite : $D_f=\left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\cup\left]\sqrt{5},+\infty\right[$

6) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}\geq 0\ \ et\ -x^2+8x-17\neq 0\right\}$$

• $-x^2+8x-17$: Calculons son discriminant : $a=-1$; $b=8$; $c=-17$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=8^2-4\times(-1)\times(-17)=64-68=-4<0$

Ce polynôme ne possède donc pas de racines réelles

Comme : Le coefficient principal est : $a=-1<0$ et $\Delta<0$, alors : $-x^2+8x-17<0$

• Pour déterminer le signe du trinôme : $-6x^2-9x-3$

Calculons son discriminant : $a=-6$; $b=-9$; $c=-3$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=(-9)^2-4\times(-6)\times(-3)=81-72=9>0$

Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1=\frac{9-\sqrt{9}}{2a}=\frac{9-3}{2\times(-6)}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{9+\sqrt{9}}{2a}=\frac{9+3}{2\times(-6)}=\frac{12}{-12}=-1$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite : $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

PROF: ATMANI NAJIB

7) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$: Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$: $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

Or on sait que $|x|\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0 \text{ et } x-1\neq 0\}$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2 \text{ et } x\neq 1\}$ c'est-à-dire : $D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

9) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$:

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 \text{ et } 3-5x\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\dfrac{1}{2} \text{ et } x\leq\dfrac{3}{5}\right\}$ Donc : $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$

Exercice2 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ 3) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$ 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Solution 1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$: On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x\neq 0$ par suite : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$ Donc f est une fonction impaire,

$f(-x)=-f(x)$

2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

3) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ par suite $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$ Donc f est une fonction paire
  $f(-x)=f(x)$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\}$ Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ donc f est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$:On a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ signifie que : $x\neq 2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On a $-2\in D_f$ mais $-(-2)=2\notin D_f$

Donc D_f n'est pas symétrique par rapport a O

Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exercice3 : soit f une fonction définie par : $f(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

1) Déterminer D_f ensemble de définition de f

2) Montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$ 2) a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

Remarque : la fonction : $x\to\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq 0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$

Donc : par exemple : $D_E=[0;\pi]$

Exercice4 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$
Tel que : $f(x)=2x-x^2\quad\forall x\in[0;2[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

3) Donner l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0=[0;2[$:

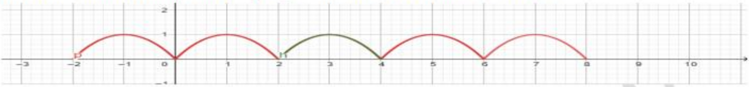
On a : f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-1$ et $b=2$ et $c=0$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$: Donc $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=1$ et $(f(1)=2-1=1)$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2;8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0=[0;2[$ et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$



2) $f(4.1)=f(2+2.1)=f(2.1)=f(2+0.1)=f(0.1)$ $f(4.1)=2(0.1)-(0.1)^2=0.19$

$f(-3.5)=f(-4+0.5)=f(0.5)$

$f(-3.5)=2(0.5)-(0.5)^2=0.75$

$f(265.11)=f(2\times132+1.11)=f(1.11)$

$f(1.11)=2(1.11)-(1.11)^2\approx0.98$

3) l'expression de : $f(x)=2x-x^2$ sur les intervalles : $I_k=[2k;2(k+1)[$ $k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[2k;2(k+1)[\Leftrightarrow 2k\leq x\prec 2(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-2k\prec 2\Leftrightarrow f(x-2k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=2(x-2k)-(x-2k)^2$ Avec $k\leq\frac{x}{2}\prec k+1$ cad $k=E\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice5 : Les fonction f et g définies respectivement par : $f(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}}$

Sont-elles égales ?

Solution : Déterminons leur ensemble de définition :Pour f, on doit avoir : $\frac{2x-1}{x}\geq0$ et $x\neq0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-1}{x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc : ce qui donne : $D_f=]-\infty;0[\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Pour g, on doit avoir $2x-1\geq0$ et $x>0$ c'est-à-dire : $x\geq\frac{1}{2}$ et $x>0$

Ce qui donne $D_g=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

On a donc $D_f\neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f\neq g$

On remarquera cependant que sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ On a : f (x) = g(x)

PROF : ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice6 : Soit f et g les fonctions numériques tel que : $f(x)=x+1$ et $g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f=D_g=\mathbb{R}$: $g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ par suite : $f\prec g$

Exercice7 : Soit f et g les fonctions numériques tel que :

$f(x)=x^2-3x+5$ et $g(x)=-x^2+2x+2$

Comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$

Solution : Pour comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ il suffit d'étudier le signe de la différence :

$f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$: On a : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$f(x)-g(x)=x^2-3x+5-\left(-x^2+2x+2\right)=x^2-5x+3$; $\Delta=1>0$:

$x_1=\dfrac{5-1}{2\times 2}=1$ et $x_2=\dfrac{5+1}{2\times 2}=\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-5x+3$		+	0	-	0	+	
$f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	

Donc : $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ et $f(x)\leq g(x)\Leftrightarrow x\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

Conclusion : $f\leq g\ sur\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$ et $f>g\ sur\ \left]-\infty;1\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice8 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=x\sqrt{x^2+1}-x^2$

1) Développer $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2$

2) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

Solution :1) Soit $x\in\mathbb{R}$

$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2=x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}+x^2=2x^2+1-2x\sqrt{x^2+1}$

2) Démontrons que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq\dfrac{1}{2}$

$f(x)-\dfrac{1}{2}=x\sqrt{x^2+1}-x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+2x^2-2x\sqrt{x^2+1}\right)=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2$

Or : $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2>0$ donc : $-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2<0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Ainsi : $f(x)<\dfrac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice9 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}$

Démontrer que f est minorée par -2

Solution : 1) montrons que f est minorée par -2

C'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ -2\le f(x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-(-2)=x-1+\sqrt{x^2+2x+3}+2=x+1+\sqrt{x^2+2x+3}$

On a : $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>(x+1)^2$

Donc : $\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{(x+1)^2+2}>\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

Or : $|x+1|\ge-(x+1)$ (et aussi : $|x+1|\ge(x+1)$)

D'où : $\sqrt{x^2+2x+3}>-(x+1)$

D'où : $\sqrt{x^2+2x+3}+x+1>0$

Ainsi : $f(x)-(-2)>0$ C'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ -2\le f(x)$

Par suite : f est minorée par -2

Exercice10 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x^2+1}$

1) Montrer que : $\dfrac{|x|}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$

2) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}-\frac{|x|}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2|x|}{2(x^2+1)}=\frac{|x|^2-2|x|+1}{2(x^2+1)}=\frac{(|x|-1)^2}{2(x^2+1)}\ge0$$

Ainsi : $\dfrac{|x|}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2) Démontrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x^2+1}=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{x^2+1}$

Or : $0\le x^2<x^2+1$ donc : $0\le\dfrac{x^2}{x^2+1}<1$ d'où : $-1<\dfrac{-x^2}{x^2+1}\le0$ (1)

On a : $\dfrac{|x|}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ -\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$ (2)

De : (1) et (2) on déduit que : $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{x^2+1}\le\dfrac{1}{2}$

Ainsi : $-\frac{3}{2}<f(x)\le\frac{1}{2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite : f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice11 : Soit f une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+3x+4$

PROF: ATMANI NAJIB

Montrer que g admet une valeur maximale sur $\mathbb{R}$ qu'il faut déterminer.

Solution : On a $D_g=\mathbb{R}$; $g(x)=-x^2+3x+4=-\left(x^2-3x\right)+4$

$$g(x)=-\left(x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

Et on a pour tous $x\in\mathbb{R}$: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$

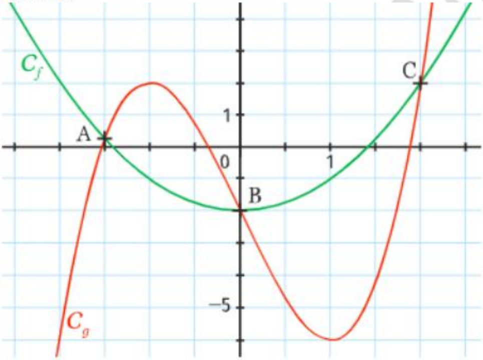
Par suite : $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0$ et donc : $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\leq\frac{25}{4}$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)\leq\frac{25}{4}$ et on a : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$

Alors : $g(x)\leq g\left(\frac{3}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Par conséquent : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$ c'est la valeur Maximal de g sur $\mathbb{R}$

Exercice12 : On considère les deux représentations graphiques dans le repère orthogonal ci-dessous.



1)Résoudre Graphiquement l'équation $g(x)=f(x)$

2)On reprend l'exemple précédent. f et g sont définies sur R par $f(x)=x^2-2$et $g(x)=2x^3-6x-2$

. Les solutions lues de $g(x)=f(x)$sont-elles exactes ?

Exercice13 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=3x^2+2$

1) Déterminer D_f et montrer f est paire

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$

3) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

4) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) f est une fonction polynôme ; donc $D_f = \mathbb{R}$

- Si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 + 2 = 3x^2 + 2$

$f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

2) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1 - x_2} \quad T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

3) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que : $x_1 \neq x_2$ On a : $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a) Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et $x_1 \neq x_2$ implique $x_1 + x_2 \succ 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \succ 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Puisque :f est une fonction paire et f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Alors : f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

4) Résumé : Tableau de variation : $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗

Remarque : il y'a une autre méthode pour étudier les variations de f sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$: $f(x) = 3x^2 + 2$

On a : $f(x) = 3g(x) + 2$ avec : $g(x) = x^2$ et on a $3 \succ 0$

Donc : les fonctions f et g ont les mêmes variations sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

Exercice14 : Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $f(x) = x^3$ 2) $g(x) = -\frac{1}{4}x^3$ 3) $h(x) = 2026x^3 - 2025$ 4) $k(x) = \frac{2024}{x}$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : 1) $f(x)=x^3$ et $D_f=\mathbb{R}$

On sait que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

2) $g(x)=-\frac{1}{4}x^3$ et $D_g=\mathbb{R}$ donc : $g=-\frac{1}{4}f$

On puisque que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que : $-\frac{1}{4}<0$

Alors : $g=-\frac{1}{4}f$:est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	↘	

3) $h(x)=2026x^3-2025$ et $D_h=\mathbb{R}$ donc : $h=2026f-2025$

On puisque que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que : $2026>0$

Alors : $2026f$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et aussi : $h=2026f-2025$ est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	↗	

4) $k(x)=\frac{2024}{x}$ et $D_k=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $k=2024v$

Alors : k est décroissante sur $]0;+\infty[$ et est décroissante sur $]-\infty;0[$ car $2024>0$

Exercice15 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

(C_f) Sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f

2) Montrer que : f est impaire

3)a) Montrer que la courbe représentative de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ est une portion d'une hyperbole que l'on précisera

b) En déduire une méthode pour tracer la courbe (C_g) de fonction g

4)Etudier les variations de de f sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ puis donner le tableau de variation de f sur D_f

5) Construire (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}$

PROF: ATMANI NAJIB

1)On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-2\neq 0$

Signifie $|x|\neq 2$ c'est-à-dire : $x\neq 2$et $x\neq -2$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

2)a) Montrons que f est impaire :

☞ $x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ Signifie $x\neq 2$et $x\neq -2$

Signifie $-x\neq -2$et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$et $-x\neq 2$

Signifie $-x\in D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

☞ $f(-x)=\frac{-x}{|-x|-2}=\frac{-x}{|x|-2}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=-\frac{x}{|x|-2}=-f(x)$ par suite : f est impaire

3)a) Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

Donc : $|x|=x$ par suite : $f(x)=\frac{x}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}$

Et puisque f est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ on a : $f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{2}{x-2}=1+\frac{2}{x-2}$

Donc : $f(x)=1+\frac{2}{x-2}$ Pour tout $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$

Puisque : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ Alors : $\alpha=-2$ et $\beta=1$ et $k=1>0$

Donc : sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ (C_f) est une portion d'une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

b) la courbe (C_f) de fonction f sur $[0;2[\cup]2;+\infty[$ coïncide avec la portion de l'hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$; $W(2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=2$ et $y=1$

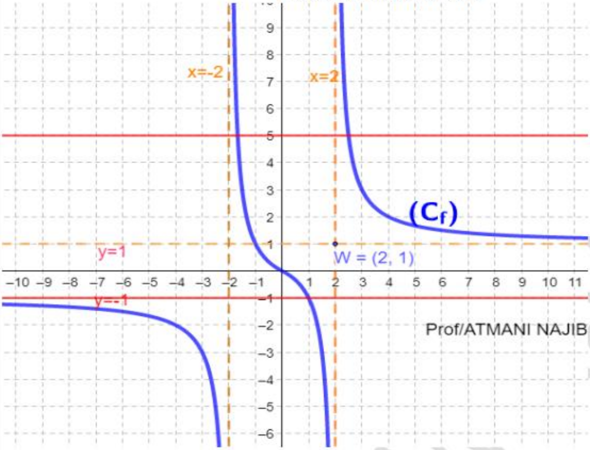
4)Puisque : $k=1>0$ alors f est strictement décroissante sur $[0;2[$ et $]2;+\infty[$

Puisque f est impaire alors en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘ 0 ↘	‖	↘

5) Construction de (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

PROF: ATMANI NAJIB



Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x+3$

1) Déterminer $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ On pose : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^n x+3\left(2^n-1\right)$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

1) Déterminons $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=2f(x)+3=2(2x+3)+3=2^2x+6+3=4x+9$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ On pose : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^n x+3\left(2^n-1\right)$

On pose : $P(n)$: $f^{(n)}(x)=2^n x+3\left(2^n-1\right)$

PROF:ATMANI NAJIB

1étapes : l'initialisation :

Pour n=2 nous avons :d'une part : $f^{(2)}(x)=4x+9$ et $2^n x+3(2^n-1)=2^2 x+3(2^2-1)=4x+9$

Donc $f^{(n)}(x)=2^n x+3(2^n-1)$ pour : n=2

Donc : $P(2)$:est vraie.

2étapes : d'hérédité :Soit $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ Supposons que $P(n)$ soit vraie

C'est-à-dire : $f^{(n)}(x)=2^n x+3(2^n-1)$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$:est vraie.

Montrons alors que : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}x+3(2^{n+1}-1)$??

On a : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)$

Donc : $f^{(n+1)}(x)=\left(f\circ f^{(n)}\right)(x)=f\left(f^{(n)}(x)\right)=2f^{(n)}(x)+3$ et comme : $f^{(n)}(x)=2^n x+3(2^n-1)$

Alors : $f^{(n+1)}(x)=2\left(2^n x+3(2^n-1)\right)+3=2\times 2^n x+6(2^n-1)+3=2^{n+1}x+3(2\times 2^n-2+1)=2^{n+1}x+3(2\times 2^{n+1}-1)$

Donc $P(n+1)$:est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $f^{(n)}(x)=2^n x+3(2^n-1)$

Exercice 17 : Soit f une fonction numérique définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^3+1}$

En utilisant les propriétés de la monotonie des fonctions composées

Etudier les variations de f sur $[-1;+\infty[$

Solutions : On peut décomposer la fonction f et l'écrire sous la forme : $f=v\circ u$

$u(x)=x^3$ et $v(x)=\sqrt{x+1}$ car :

$f(x)=\sqrt{u(x)+1}=v(u(x))=(v\circ u)(x)$

Tableau de variation de u :

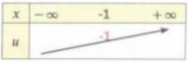
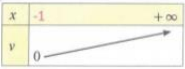

x
$-\infty$
-1
$+\infty$
u
-1

Tableau de variation de v :



→On a : $u([-1;+\infty[)\subset[-1;+\infty[$

En effet : si on a $x\in[-1;+\infty[\Rightarrow x\geq -1\Rightarrow x^3\geq -1\Rightarrow x^3+1\geq 0\Rightarrow u(x)\geq 0\Rightarrow u(x)\in[-1;+\infty[$

Puisque u est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ et $u([-1;+\infty[)\subset[-1;+\infty[$ et v est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ alors : $f=v\circ u$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Exercice18 : Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

PROF: ATMANI NAJIB

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;5)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) a) Etudier graphiquement le signe de la fonction g

b) Etudier algébriquement le signe de la fonction g

6) a) Résoudre graphiquement de l'équation $f(x)=g(x)$:

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

7)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

a) Déterminer D_h

b) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad \forall x\in D_h$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $]1;+\infty[$; $\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$

Solution : 1) $f(x)=x^2+1$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=1$; $b=0$ et $c=1$

Donc $\alpha=-\dfrac{0}{2a}=0$ et $f(\alpha)=f(0)=0^2+1=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;h(\alpha))$ c'est à dire : $W(0;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=0$

Comme : $\boxed{a=1>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

Le tableau de variations de f : $\boxed{a=1>0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

2) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; on a $g(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; On utilisant un résumé de notre cours :

PROF. ATMANI NAJIB

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

1iér cas : si $\text{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\text{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre exercice on a : $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ Avec : $a=2\,;b=1;c=1\,;\ d=-1$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\frac{-1}{1}=1$ et $y=\frac{2}{1}=2$

$\text{Det}(g)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=2\times(-1)-1\times 1=-3<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;1[$ *et* $]1;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	↘	‖	↘

3) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

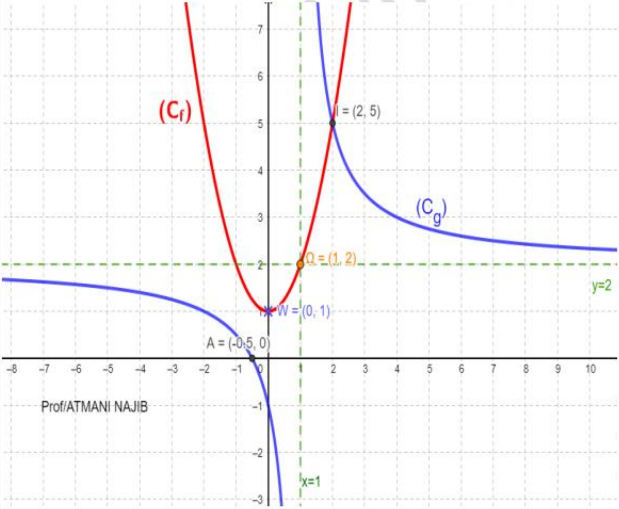
Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

4) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\,;\,5)$

$f(2)=2^2+1=5$ donc : $A(2;5)\in(C_f)$ et $g(2)=\frac{2\times 2+1}{2-1}=5$ donc : $A(2;5)\in(C_g)$

Donc : $(C_f)\cap(C_g)=\{A(0;2)\}$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) a) Etude graphique du signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

$g(x)\geq 0$ si et seulement si la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses

$g(x)\geq 0$ Signifie que $x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$

$g(x)\leq 0$ Signifie que $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

b) Etudions algébriquement le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

Voici le tableau de signe qui résume le signe de g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$g(x)\geq 0\ \forall x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$ et $g(x)\leq 0\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[$

6) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

ANI NAJIB

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2\ ;\ 5)$

Donc : l'abscisse du point d'intersection des courbes (C_f) et (C_g) est $x=2$ par suite : $S=\{2\}$

b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

7) a) Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x^2-2x+1\neq 0\right\}$

On a $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{1\}=\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

b) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad \forall x\in D_h$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2+1=\dfrac{(2x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{4x^2+4x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f\circ g)(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=h(x)$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $\left]1;+\infty\right[$; $\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$; $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$

a) sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$: On a $h(x)=(f\circ g)(x)\quad \forall x\in D_h$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$: $g(x)\in\left[0;+\infty\right[$ et f est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$

b) sur $\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$: $g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ et f est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $h=f\circ g$ est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};1\right[$

c) Sur $\left]1;+\infty\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$ et $\forall x\in\left]1;+\infty\right[$ $g(x)\in\left]0;+\infty\right[$ et f est croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ alors $h=f\circ g$ est décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$.

Donc le tableau de variations de h:

PROF . ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$h(x)$		↘	1	↗	‖	↘	

Exercice19: Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$

et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) Déterminer D_h tel que : $h=g\circ f$

2) Déterminer les tableaux de variations de f et g

3) a) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Résoudre graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x>(x+2)\sqrt{x+1}$

4) Étudier les variations de h sur : $]-\infty;-2[$ et $[-1;+\infty[$

5) Calculer $h(x)=(g\circ f)(x)\ \forall x\in D_h$

Solution : $g(x)=\sqrt{x+1}$ et $f(x)=\frac{x}{x+2}$ et $h=g\circ f$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2\}=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -1\}=[-1,+\infty[$$

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f\ \ et\ f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2\ \ et\ f(x)\geq -1\}$$

$$f(x)\geq -1\Leftrightarrow\frac{x}{x+2}\geq -1\Leftrightarrow\frac{x}{x+2}+1\geq 0\Leftrightarrow\frac{x+x+2}{x+2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2x+2}{x+2}\geq 0$$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+2}{x+2}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$f(x)\geq -1\Leftrightarrow x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$

Donc : $D_h=\{x\in\mathbb{R}/x\neq -2\ \ et\ x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[\}$

Donc : $D_h=]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$

1) Déterminons les tableaux de variations de f et g

→Le tableau de variations de f : $f(x)=\frac{x}{x+2}$

En générale si : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_f) est une hyperbole de centre $C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et

PROF: ATMANI NAJIB

d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre exercice on a : $f(x)=\frac{x}{x+2}$ donc $\left(C_f\right)$ est une hyperbole de centre $C(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-2$ et $y=1$

$f(x)=\frac{1x+0}{1x+2}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-0=2>0$

Donc : f est strictement croissante sur : $]-\infty;-2[$ et $]-2;+\infty[$

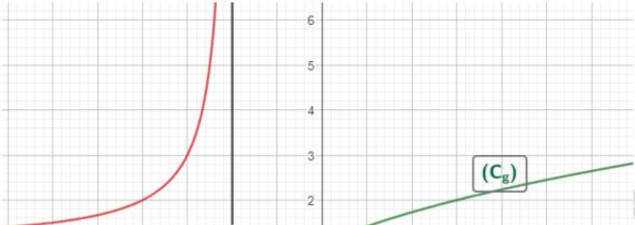
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

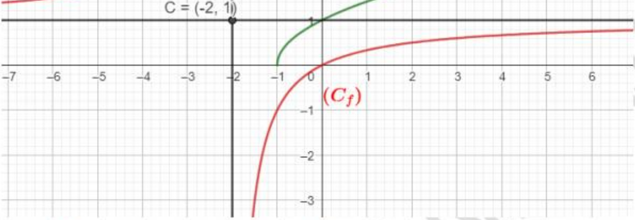
$\rightarrow g(x)=\sqrt{x+1}$; g est strictement croissante sur : $[-1;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	

3) a) Représentation des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$





b) Résolvons graphiquement sur $[-1;+\infty[$ l'inéquation : $x>(x+2)\sqrt{x+1}$

Soit : $x\in[-1,+\infty[\ :\Rightarrow x\geq -1\Rightarrow x+2\geq 1>0$

$x>(x+2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x+2)}>\sqrt{x+1}$ car $x+2>0$

$x>(x+2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$

Et puisque : graphiquement sur $[-1;+\infty[$ (C_f) est au-dessous de (C_g) alors : $S=\varnothing$

4) →Etudions les variations de $h=g\circ f$ sur : $]-\infty;-2[$

Puisque f est croissante sur $]-\infty;-2[$

et $f([-2;+\infty[)\subset]1;+\infty[$ et g est croissante sur $]1;+\infty[$

alors : $h=g\circ f$ est croissante sur $]-\infty;-2[$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$	
$f(x)$	↗	↗

x	-1 $+\infty$
$g(x)$	0 ↗

→Etudions les variations de h sur : $[-1;+\infty[$

Puisque f est croissante sur $[-1;+\infty[$

et $f([-1;+\infty[)\subset[-1;1[$ et g est croissante sur $[-1;1[$ alors $h=g\circ f$ est croissante sur $[-1;+\infty[$

5) Calculons : $h(x)=(g\circ f)(x)\ \forall x\in D_h$

Soit $x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$: $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{\dfrac{x}{x+2}+1}=\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}$

Alors : $h(x)=\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}$; $\forall x\in]-\infty;-2[\cup[-1;+\infty[$

Exercice20 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=1+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans

PROF: ATMANI NAJIB

un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad \forall x\in D_f$

b) Etudier le signe de la fonction g sur D_g

3) Etudier la monotonie de f dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $]1;+\infty[$

4) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=\dfrac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}$

1) ä) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: On a $f(x)=\dfrac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{x^2-2x+1}$

Alors : $f(x)=\dfrac{1(x^2-2x+1)+4x^2+4x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{1(x-1)^2+(2x+1)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{1(x-1)^2}{(x-1)^2}+\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=1+\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)^2}=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $1\leq f(x)$

Puisque : $f(x)=1+\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$

Alors : $f(x)-1=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $1\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

c) Comme : $f(x)-1=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Alors : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$ et donc : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

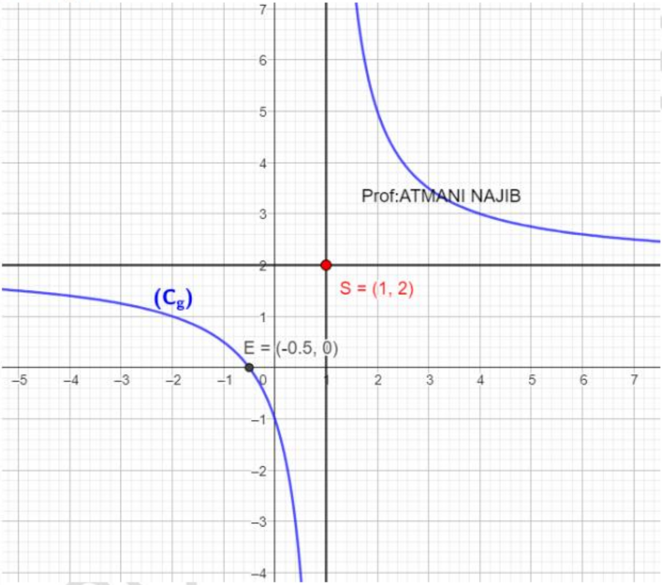
PROF: ATMANI NAJIB

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 1 en $-\frac{1}{2}$

d) $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3<0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives :

$x=1$ et $y=2$.



2) a) Vérifions que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad \forall x\in D_f$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$; $(h\circ g)(x)=h(g(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2+1=\frac{(2x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{4x^2+4x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

Donc : $(f\circ g)(x)=\frac{5x^2+2x+2}{(x-1)^2}=\frac{5x^2+2x+2}{x^2-2x+1}=f(x)$

Donc : $f=h\circ g$

c) Etudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}-\{1\}$

On peut étudier le signe soit :

Graphiquement : $\rightarrow \left(C_g\right)$ est au-dessous de l'axe des abscisses si : $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right[$

Donc : $g\left(x\right) \leq 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right[$

$\rightarrow \left(C_g\right)$ est au-dessus de l'axe des abscisses si : $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]1;+\infty\right[$

Donc : $g\left(x\right) \geq 0 \ \forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]1;+\infty\right[$

Algébriquement : Le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$g\left(x\right) \geq 0 \ \forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \cup \left]1;+\infty\right[$ et $g\left(x\right) \leq 0 \ \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right[$

4) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$

Le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		↘	1	↗	

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

a) sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$: On a $f(x)=(h \circ g)(x) \quad \forall x \in D_f$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	0	↘	‖	↘	

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]: g(x) \in \left[0;+\infty\right[$ (voir signe de g) et h est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ alors $f = h \circ g$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

b) sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ et $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};1\right[: g(x)\in\left]-\infty;0\right]$

(voir signe de g) ; et h est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right[$

c) Sur $\left]1;+\infty\right[$: Puisque g est décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$ et $\forall x\in\left]1;+\infty\right[\ g(x)\in\left]0;+\infty\right[$

(Voir signe de g) et h est croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$.

5)le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗	‖	↘	

→Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $-\frac{1}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB