1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°4 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{1}{|x|+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2) Calculer les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.

2) Les nombres : 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 et 2 ont-ils des antécédents par f ? si oui, trouver ces antécédents

3) Montrer que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Solution : 1) $D_f=\{x\in E / f(x)\in\mathbb{R}\}$

$D_f=\{x\in E / |x|+1\neq 0\}$

$|x|+1=0$ Signifie $|x|=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $|x|+1$ ne s'annule jamais

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

2) Calculons les images de : 0 ; 1 ; -1 et -2 par f.

- $f(0)=\frac{1}{|0|+1}=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1$

Donc : l'image de 0 par f est : 1

- $f(1)=\frac{1}{|1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de 1 par f est : $\frac{1}{2}$

- $f(-1)=\frac{1}{|-1|+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Donc : l'image de -1 par f est : $\frac{1}{2}$

Remarque : 1 et -1 ont les mêmes images par f car : $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}$

- $f(-2)=\frac{1}{|-2|+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

Donc : l'image de -2 par f est : $\frac{1}{3}$

2) a) Déterminons les antécédents de : 0 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

PROF. ATMANI NAJIB

$f(x)=0$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=0$

Signifie que : $1=0$ (impossible)

Par suite : 0 n'admet pas d'antécédents par f

b) Déterminons les antécédents de : $\frac{1}{2}$ par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de $\frac{1}{2}$ par f signifie que $\frac{1}{2}$ est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=\frac{1}{2}$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $|x|+1=2$

Signifie que : $|x|=1$

Signifie que : $x=1$ ou $x=-1$

Par suite : les antécédents de $\frac{1}{2}$ par f sont : 1 et -1.

c) Déterminons les antécédents de : 1 par f s'ils existent :

x Est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=1$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=1$

Signifie que : $|x|+1=1$

Signifie que : $|x|=0$

Signifie que : $x=0$

Par suite :1 admet un unique antécédent par f c'est : 0

d) Déterminons les antécédents de : 2 par f s'ils existent :

x est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de x par f

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=1$

$f(x)=2$ Signifie que : $\frac{1}{|x|+1}=2$

Signifie que : $|x|+1=\frac{1}{2}$

PROF. ATMANI NAJIB

Signifie que : $|x|=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ (impossible)

Par suite : 2 n'admet pas d'antécédents par f

3) Montrons que 1 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

On a déjà vu que : $f(0)=1$

Il suffit de montrer que : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $|x|\geq 0$ donc : $|x|+1\geq 1$ donc : $\frac{1}{|x|+1}\leq 1$

Donc : $f(x)\leq f(0)$ pour tout réel x

Par suite : $f(0)=1$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\frac{x^2+1}{5x^2-4x}$ 2 $f(x)=\frac{|-5x^2+2|}{2x^2-x-6}$ 3) $f(x)=\frac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$

4) $f(x)=\sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$ 5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x}$ 6) $f(x)=\frac{x-\sqrt{1-3x}}{2|x-1|-|x+5|}$

7) $f(x)=\frac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$ 8) $f(x)=\frac{2\sin^2 x+\tan x+1}{\tan x-\sqrt{3}}$

Solution :1) $f(x)=\frac{x^2+1}{5x^2-4x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/5x^2-4x\neq 0\}$

$5x^2-4x=0$ Signifie que : $x(5x-4)=0$

Signifie que : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$ c'est-à-dire : $x = 0$ ou $x=\frac{4}{5}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

2 $f(x)=\frac{|-5x^2+2|}{2x^2-x-6}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-6\neq 0\}$

Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$: a = 2, b = -1 et c = -6

Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes : **PROF : ATMANI NAJIB**

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$

3) $f(x)=\frac{5x^5-5x-1}{2x^4-3x^2-2}$

PROF: ATMANI NAJIB

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2x^4 - 3x^2 - 2 \neq 0 \quad \right\}$

$2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ Equivalent à : $2\left(x^2\right)^2 - 3x^2 - 2 = 0$

Faisons un changement de variable en posant : $X = x^2$ nous obtenons donc : l'équation :

$2X^2 - 3X - 2 = 0$

a = 2, b = -3 et c = - 2 et $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2} = 2$

Qui est équivalent à : $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 2$ et par suite : $x^2 = -\frac{1}{2}$ ou $x^2 = 2$

Mais l'équation : $x^2 = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$x^2 = 2$ Signifie : $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Par suite : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$

4) $f(x) = \sqrt{(x+2)(3x-1)(2x+5)}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / (x+2)(3x-1)(2x+5) \geq 0 \quad \right\}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$ et $3x-1=0$ qui signifie que : $x = \frac{1}{3}$ et $2x+5=0$ qui signifie que :

$x = -\frac{5}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = \left[-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

PROF : ATMANI NAJIB

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{2x}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \quad et \quad 2x \geq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \quad et \quad x \geq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / (x-2)(x+2) \geq 0 \quad et \quad x \geq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x - 2 \geq 0 \quad et \quad x \geq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \quad et \quad x \geq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \right\} = [2.+\infty[$

PROF ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

6) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{1-3x}}{2|x-1|-|x+5|}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2|x-1|-|x+5|\neq 0\ \ et\ 1-3x\geq 0\ \right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2|x-1|-|x+5|\neq 0\ \ et\ -3x\geq -1\ \right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2|x-1|-|x+5|\neq 0\ \ et\ x\leq\dfrac{1}{2}\ \right\}$

$2|x-1|=|x+5|$ Signifie que : $|2x-2|=|x+5|$

Règle : L'égalité |a| = |b| est équivalente à : a = b ou a = −b

Signifie que : $2x-2=x+5$ ou $2x-2=-(x+5)$

Signifie que : $x=7$ ou $2x-2=-x-5$

Signifie que : $x=7$ ou $3x=-3$

Signifie que : $x=7$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq -1\ \ et\ \ x\neq 7\ \ et\ x\leq\dfrac{1}{2}\ \right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;\dfrac{1}{2}\right]$

7) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\sin(2x)-\cos(3x)\neq 0\right\}$

On a : $\sin(2x)-\cos(3x)=0$

Équivaut à : $\sin(2x)=\cos(3x)$

C'est-à-dire : $\sin(2x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$ Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

C'est-à-dire : $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left(\left\{\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$

PROF : ATMANI NAJIB

8) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x+\tan x+1}{\tan x-\sqrt{3}}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\quad \tan x\neq\sqrt{3}\ \ et\ \ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\ \ \tan x\neq\tan\dfrac{\pi}{3}\ \ et\ \ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\quad et\ \ x\neq\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ \ et\ \ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{3}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 3 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\ ;\ b^2f(a)=a^2f(b)$

Si on sait que : $f(2)\neq 0$ calculer : $\dfrac{f(5)-f(1)}{f(2)}$

Solution : On a : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\ ;\ b^2f(a)=a^2f(b)$ **PROF : ATMANI NAJIB**

Donc : $\begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}\Rightarrow f(5)=25f(1)$

Donc : $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow 4f(1)=f(2)$

Donc on a : $\dfrac{f(5)-f(1)}{f(2)}=\dfrac{25f(1)-f(1)}{4f(1)}=\dfrac{24f(1)}{4f(1)}=6$

Exercice4 : Soient les deux fonctions définies de $[1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

et $g(x)=\begin{cases}2 & si\ \ 1\leq x\leq 2\\ 2\sqrt{x-1} & si\ \ x>2\end{cases}$

Montrer que : $f=g$

Solution : Soit $x\in[1;+\infty[$:

$f(x)=\sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}^2-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$

Si : $1\leq x\leq 2$ alors : $\sqrt{x-1}-1\leq 0$ et $\sqrt{x-1}+1>0$

Donc : $f(x)=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2=g(x)$

Si : $x>2$ alors : $\sqrt{x-1}-1\geq 0$ et $\sqrt{x-1}+1>0$

Donc : $f(x)=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}=g(x)$

Par suite : $\forall x\in[1;+\infty[\ :\ f(x)=g(x)$

Par suite : $f=g$

Exercice5 : Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à la courbe de g où :

$f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=x+1$

Solution : On a $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_g=\mathbb{R}$

Donc : $D_f\cap D_f=\mathbb{R}-\{-1\}=D_f$

Etudions la position relative de la courbe de f par rapport à la courbe de g sur $\mathbb{R}-\{-1\}$

Méthode : Pour cela étudions le signe de : $f(x)-g(x)$

$f(x)-g(x)=x+\dfrac{1}{x+1}-x-1=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{1-x-1}{x+1}=\dfrac{-x}{x+1}$

Tableau de signe :

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x$		+		+	0	-	
$x+1$		-	0	+		+	
$f(x)-g(x)$		-		+	0	-	
Position relative de (C_f) et (C_g)		(C_f) est au-dessous de (C_g)		(C_f) est au-dessus de (C_g)	0	(C_f) est au-dessous de (C_g)	

Exercice 6 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x}$ 2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 3) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$. 4) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$

5) $h(x)=\frac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$

Solution 1) $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=(-x)^2+2(-x)+\frac{1}{-x}=x^2-2x-\frac{1}{x}$

$f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

PROF : ATMANI NAJIB

$1-x^2=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à : $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$ alors $-x\in[-1,1]$

- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

3) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ Signifie : $x^2=-5$ pas de solutions Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\frac{-2x^3}{x^2+5}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

4) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

$f(-1)=(-1)^2+\frac{1}{-1}=1-1=0$ et $f(1)=1^2+\frac{1}{1}=1+1=2$

On a : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : $\exists x=1\in\mathbb{R}\ /\ f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

Donc : f est une fonction ni paire ni impaire,

5) $f(x)=\frac{5\tan^4 x}{1+\cos^4 x}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } 1+\cos^4 x\neq 0\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Et puisque : $1+\cos^4 x\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞ $f(-x)=\frac{5\tan^4(-x)}{1+\cos^4(-x)}=\frac{5(-\tan x)^4}{1+\cos x^4}=\frac{5\tan^4 x}{1+\cos^4 x}=f(x)$ Car $\tan(-x)=-\tan x$ et $\cos(-x)=\cos x$

Donc f est une fonction paire.

Exercice 7 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$: $\forall x\in\mathbb{R}$

1) Montrer que : f est une fonction impaire

2) Donner une : expression de $f(x)$: pour tout réel x

Solution : Soit $x\in\mathbb{R}$

On a $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1) Pour tout réel x

En remplaçant x par –x on trouve : $5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1) + (2) donne : $6(f(-x)+f(x))=0$ donc : $f(-x)+f(x)=0$

Donc : $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : f est une fonction impaire

2) On a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc : $5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 8 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=2x-3 \ \ si \ x\in]-\infty;-2[\\ f(x)=x^3-2x \ \ si \, x\in[-2,2] \\ f(x)=2x+3 \ \ si \, x\in]2;+\infty[\end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

Solution : 1) Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) ☛Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☛→Si : $x\in]-\infty;-2[$ alors : $-x\in]2;+\infty[$

On a : $f(x)=2x-3$ et $f(-x)=2(-x)+3=-2x+3$ donc : $-f(x)=-2x+3$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

☛→Si : $x\in[-2,2]$ alors : $-x\in[-2,2]$

On a : $f(x)=x^3-2x$ et $f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x$ donc : $-f(x)=-x^3+2x$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

☛→Si : $x\in]2;+\infty[$ alors : $-x\in]-\infty;-2[$

On a : $f(x)=2x+3$ et $f(-x)=-2x-3$ donc : $-f(x)=2x+3$

Donc : $f(-x)=-f(x)$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(-x)=-f(x)$ par suite : f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de (C_f) il suffit de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

Exercice9 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$

1) Déterminer D_f
2) Démontrer que f est minorée par 1.
3) Démontrer que f est majorée par 2 .Conclure

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x^2+2x+2\neq0\}$

$\Delta=4-8=-4<0$: pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc : $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-1=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-1=\frac{2x^2+4x+3-1(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$$

Donc : $f(x)-1=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}$ Or $x^2+2x+2>0$ car $\Delta=-4<0$(signe de a=1)

Et on a : $(x+1)^2\geq0$ donc $f(x)\geq1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Par suite f est minorée sur $\mathbb{R}$ par : $m=1$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Soit $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x)-2=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}-2=\frac{-1}{x^2+2x+2}<0$

Donc : $f(x)<2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Par suite f est majorée par 2 .

Conclusion : $1 \le f(x) < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice10 : Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4\sin x-3$ est Bornée.

Solution : On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-4 \le 4\sin x \le 4$

Donc : $-4-3 \le 4\sin x-3 \le 4-3$

Donc : $-7 \le g(x) \le 1$

Donc : g est donc bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice11 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimale de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution :1) $D_f=\left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x}+2 \neq 0 \text{ et } x \ge 0\right\}=\left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq -2 \text{ et } x \ge 0\right\}$

$D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x) \ge -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \ge 0$

Donc $f(x) \ge -1 \; \forall x \in \mathbb{R}^+$ et on a :

$f(x)=-1 \Leftrightarrow f(x)+1=0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0 \Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0)=-1$ donc : $f(x) \ge f(0) \; \forall x \in \mathbb{R}$

Ont dit que $f(0)=-1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2} \prec 0$

Donc : $f(x) \prec 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc : f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Etudier le signe de f

2) a) Démontrer que f est majorée par $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Est ce que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution :1) Soit $x \in \left]1;+\infty\right[$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$$

Donc $f(x)\succ 0$ si $x \in \left]1;+\infty\right[$

2) a) $x \in \left]1;+\infty\right[$ Montrons que $f(x)\leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x \in \left]1;+\infty\right[$ donc $x \succ 1$ cad $x+1 \succ 2$

Donc : $\sqrt{x+1} \succ \sqrt{2}$ alors : $\sqrt{x+1}+\sqrt{2} \succ 2\sqrt{2}$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \prec \frac{1}{2\sqrt{2}}$ c'est-à-dire : $f(x) \prec \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x \in \left]1;+\infty\right[$

f est donc majorée sur $\left]1;+\infty\right[$ par $M=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Conclusion : $2 \prec f(x) \leq 3$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x \in \left]1;+\infty\right[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exercice13 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T=2$

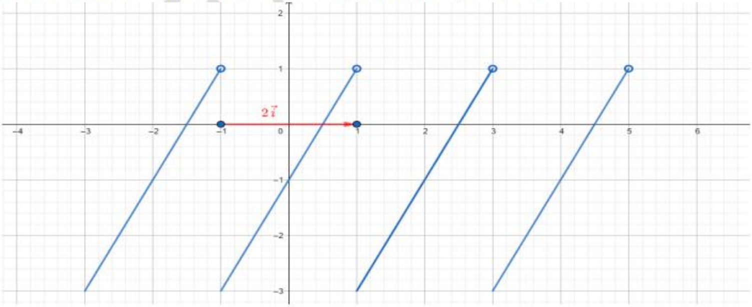
Tel que : $f(x)=2x-1$ $\forall x \in \left[-1;1\right[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction f sur $\left[-3;5\right[$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

2) Calculer : $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(2026)$

Solution :1) la représentation graphique de la fonction f sur $\left[-3;5\right[$ est :

ATMANI NAJIB



2) Calculons : $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(2026)$

On a : $f(x)=2x-1 \quad \forall x \in [-1;1[$

$\rightarrow -1 \in [-1;1[$ Donc : $f(-1)=2(-1)-1=-3$

$\rightarrow 0 \in [-1;1[$ Donc : $f(0)=2\times 0-1=--1$

$\rightarrow \frac{1}{2} \in [-1;1[$ Donc : $f(0)=2\times\frac{1}{2}-1=1-1=0$

$\rightarrow 1 \notin [-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(1)=f(-1+2)=f(-1)=-3$ car f est 2 périodique

$\rightarrow 2 \notin [-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(2)=f(0+2)=f(0)=-1$ car f est 2 périodique

$\rightarrow 2026 \notin [-1;1[$ on ne peut pas utiliser l'expression de : $f(x)=2x-1$

Mais on a : $f(2026)=f(0+2\times 1013)=f(0)=-1$

Car f est périodique de période $T=2$ et aussi $T'=1013\times 2$ est une période

Exercice14 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Vérifier que f est périodique et 2π est une période de f

3) En déduire un domaine d'étude de f : D_E

Solution : 1) →Déterminons D_f et étudions la parité de f

$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2\cos x+1\neq 0\}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \quad et \quad 2\cos x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \quad et \quad \cos x\neq -\frac{1}{2}$

ATMANI NAJIB

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \cos x\neq\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ x\neq -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

→Etudions la parité de f

☺$x\in D_f \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ x\neq-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ et\ x\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\ et -x\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ et\ -x\neq-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow -x\in D_f$

☺$f(-x)=\frac{\sin(-x)\cos(-x)}{2\cos(-x)+1}=-\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}=-f(x)$

Donc : f une fonction impaire

2) Vérifions que f est périodique et 2π est une période de f

Soit $x\in\mathbb{R}$: $f(x+2\pi)=\frac{\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}{2\cos(x+2\pi)+1}=\frac{\sin x\cos x}{2\cos x+1}=f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et 2π est une période de f

3) Déduisons un domaine d'étude de f : D_E

Comme : f une fonction périodique et 2π est une période de f et paire on choisit un intervalle d'étude : $D_E=[0,\pi]\cap D_f=\left[0,\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

Exercice 15 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ el que :

$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

1)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)\neq-1$ et $f(x)(f(x)+1)\neq0$

2)Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ et $f(x+2)=\frac{-1}{f(x)}$

3) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f(x+4)=f(x)$

4)Déduire que f est périodique

Solution : 1) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)\neq-1$ et $f(x)(f(x)+1)\neq0$

On va raisonner par l'absurde :

On suppose que : $\exists x\in\mathbb{R}$: $f(x)=-1$ ou $f(x)(f(x)+1)=0$

Si : $f(x)=-1$ essayons de trouver une contradiction

$f(x)=-1$; Comme on a : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x)$

$\Rightarrow f(x+1)\times(-1)+f(x+1)+1=-1 \Rightarrow -f(x+1)+f(x+1)+1=-1$

$\Rightarrow +1=-1$ Contradiction

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq -1$

Si : $f(x)(f(x)+1)=0$ essayons de trouver une contradiction

$f(x)(f(x)+1)=0 \Rightarrow f(x)=0$ ou $f(x)=-1$ (déjà montrer impossible)

$f(x)=0$; Comme on a : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=0$

$\Rightarrow f(x+1)\times 0+f(x+1)+1=0 \Rightarrow f(x+1)=-1$ Impossible car $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq -1$

Donc : aussi pour : $f(x+1) \neq -1$ donc : Contradiction

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x)(f(x)+1) \neq 0$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq -1$ et $f(x)(f(x)+1) \neq 0$

2) → Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+1)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x+1)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$

Comme on a : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x)$

Donc : $f(x+1)(f(x)+1)=f(x)-1$ et comme : $f(x)+1 \neq 0$ car $f(x) \neq -1$

Donc : $f(x+1)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

→ Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+2)=\dfrac{-1}{f(x)}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x+2)=f((x+1)+1)=\dfrac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}$ et on a : $f(x+1)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$

Donc : $$f(x+2)=\frac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}=\frac{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=\frac{\dfrac{-2}{f(x)+1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}}=\frac{-2}{2f(x)}=\frac{-1}{f(x)}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+2)=\dfrac{-1}{f(x)}$

3) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x+4)=f(x)$

Soit : $x \in \mathbb{R}$: $f(x+4)=f((x+2)+2)$ comme on a : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+2)=\dfrac{-1}{f(x)}$

Alors : $$f(x+4)=f((x+2)+2)=\frac{-1}{f(x+2)}=\frac{-1}{\dfrac{-1}{f(x)}}=f(x)$$

4)Déduisons que f est périodique :Puisque → $\forall x \in \mathbb{R} : x+4 \in \mathbb{R}$ et → $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f(x+4)=f(x)$

Alors : f est périodique et 4 est une période de f

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice16 : 1) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que : $f(x)=|x-2|+|x+2|$

2) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f et déterminer les extremums de f

Solution :

- On a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$

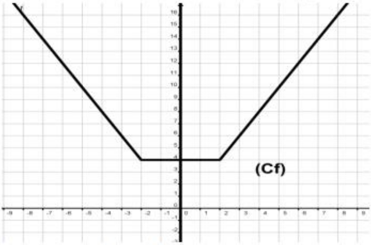
$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

x	$-\infty \qquad -2$		$2 \qquad +\infty$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$x+2$	$-$ 0	$+$ 0	$+$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$ 0	$x+2$
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert$	$-2x$	4	$2x$

Donc : $\rightarrow f(x)=-2x$ si $x\in\left]-\infty,-2\right]$

$\rightarrow f(x)=4$ si $x\in[-2,2]$

$\rightarrow f(x)=2x$ si $x\in\left[2,+\infty\right[$



2) $\rightarrow$Si : $x\in\left]-\infty,-2\right]$: $f(x)=-2x$

Soients $x_1\in\left]-\infty,-2\right]$ et $x_2\in\left]-\infty,-2\right]$ tel que : $x_1<x_2$

$x_1<x_2\Rightarrow -2x_1>-2x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Donc : f strictement décroissante sur : $\left]-\infty,-2\right]$

$\rightarrow$Si : $x\in[-2,2]$: $f(x)=4$

$\forall x\in[-2,2]$; $f(x)=4$

Donc : f strictement constante sur : $[-2,2]$

$\rightarrow$Si : $x\in\left[2,+\infty\right[$: $f(x)=2x$

Soients $x_1\in\left[2,+\infty\right[$ et $x_2\in\left[2,+\infty\right[$ tel que : $x_1<x_2$

$x_1<x_2\Rightarrow 2x_1<2x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

MANI NAJIB

Donc : f strictement croissante sur : $[2,+\infty[$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f(x)$	↘	4	→	4	↗

D'après le tableau de variations de f : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq f(2)$ et $f(x) \geq f(-2)$

Donc : 4 est la valeur minimale de f

Exercice17 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$

On pose : $h(x) = (g \circ f)(x)$

1) Déterminer D_h

2) Déterminer : $h(x)$ $\forall x \in D_{g \circ f}$

3) Soit la fonction k définie par : $k(x) = \dfrac{1}{4x-3}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_f \ \ et \ \ f(x) \in D_g\}$$

PROF. ATMANI NAJIB

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1 \ et \ f(x) \neq -3\}$$

$$f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = -3 \Leftrightarrow -3(x-1) = x \Leftrightarrow -3x+3 = x \Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Donc : $D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1 \ et \ x \neq \dfrac{3}{4}\right\}$

Donc : $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$

2)Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$h(x) = \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\frac{x}{x-1} + 3} = \frac{\frac{x-x+1}{x-1}}{\frac{x+3x-3}{x-1}} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{4x-3}{x-1}} = \frac{1}{4x-3}$$

Donc : $h(x) = \dfrac{1}{4x-3}$: $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$

3)Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$D_h = D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4};1\right\}$ et $D_k = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

ATMANI NAJIB

Exercice 18 : Soit f une fonction définie par : $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

1) Etudier la parité de f

2) Soient : $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$: Calculer : $\left(f(x_1)\right)^2-\left(f(x_2)\right)^2$

3) En déduire les variations de f sur D_f

4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4-x^2>0\}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=]-2;2[$

- Pour tout réel x si : $x\in]-2;2[$, alors $-x\in]-2;2[$

- $f(-x)=\frac{|-x|}{\sqrt{4-(-x)^2}}=\frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soient : $x_1\in]-2;2[$ et $x_2\in]-2;2[$ tel que : $x_1\neq x_2$: Calculons : $\left(f(x_1)\right)^2-\left(f(x_2)\right)^2$

$$\left(f(x_1)\right)^2-\left(f(x_2)\right)^2=\frac{x_1^2}{4-x_1{}^2}-\frac{x_2^2}{4-x_2{}^2}=\frac{4\left(x_1^2-x_2^2\right)}{\left(4-x_1{}^2\right)\left(4-x_2{}^2\right)}=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\left(4-x_1{}^2\right)\left(4-x_2{}^2\right)}$$

3) Déduisons les variations de f sur D_f

PROF: ATMA

Etudions les variations de f sur $[0;2[$

Soient : $x_1\in[0;2[$ et $x_2\in[0;2[$

On a : $\left(f(x_1)\right)^2-\left(f(x_2)\right)^2=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\left(4-x_1{}^2\right)\left(4-x_2{}^2\right)}$

Donc : $\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\left(f(x_1)+f(x_2)\right)=\frac{4(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\left(4-x_1{}^2\right)\left(4-x_2{}^2\right)}$

Donc : $\frac{\left(f(x_1)-f(x_2)\right)}{x_1-x_2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)=\frac{4(x_1+x_2)}{\left(4-x_1{}^2\right)\left(4-x_2{}^2\right)}$

Comme $x_1\in[0;2[$ et $x_2\in[0;2[$ et $x_1\neq x_2$ et $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}\geq 0$

Alors : $4-x_1{}^2>0$ et $4-x_2{}^2>0$ et $f(x_1)+f(x_2)\geq 0$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;2[$

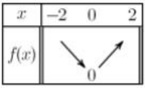
3) f est paire et le symétrique de $I=[0;2[$ est l'intervalle $I'=]-2;0]$

NI NAJIB

Puisque : f est strictement croissante sur $I=[0;2[$

Alors f est strictement décroissante sur $I'=]-2;0]$

4) Par suite le tableau de variations de f sur D_f est :



Exercice19 : Etudier les variations des fonctions définies par :

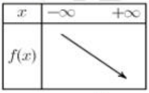
1) $f(x)=-5x^3+2021$ 2) $h(x)=-\frac{\sqrt{2}}{x}$

Solution : 1) $f(x)=-5x^3+2021$ et $D_f=\mathbb{R}$

On a : $f=-5g+2021$

Puisque la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $-5g$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $-5g+2021$ est décroissante sur $\mathbb{R}$



2) $h(x)=-\frac{\sqrt{2}}{x}$ et $D_h=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\to\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $h=-\sqrt{2}v$

Alors : h est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-\sqrt{2}<0$

Exercice20 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=-x^2+4x+3$ et $g(x)=2x$

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)a) En déduire que : f est majorée sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ On a : $\frac{27}{4}\le f(x)\le 7$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-1;2]$ On a : $-2\le f(x)\le 7$

3)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

4)Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g)

5) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

6) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)>0$

7) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)>g(x)$

8) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=-x^2+4x+3$

1) On a : $f(x)=-x^2+4x+3$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=-1$; $b=4$ et $c=3$

Donc $\alpha=-\frac{4}{2a}=-\frac{4}{2\times(-1)}=2$ et $f(2)=-(2)^2+4\times2+3=-4+8+3=7$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(2;7)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

Comme : $\boxed{a=-1<0}$ alors :

La fonction f est décroissante sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;2]$

Tableau de variations de f : On a $a=-1<0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

2)a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(2)=7$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le f(2)$

Par suite : $f(x)\le 7$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : f est majorée par 7 sur $\mathbb{R}$

b) Soit : $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ alors : $2\le x\le\frac{5}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $I=[2;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[2;\frac{5}{2}\right]$

Alors : $f\left(\frac{5}{2}\right)\le f(x)\le f(2)$ et comme : $f(2)=7$ et $f\left(\frac{5}{2}\right)=-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4\times\frac{5}{2}+3=-\frac{25}{4}+10+3=13-\frac{25}{4}=\frac{27}{4}$

Par suite : $\frac{27}{4}\le f(x)\le 7$

b) Soit : $x\in[-1;2]$ On a alors : $-1\le x\le 2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $J=]-\infty;2]$

Par suite : f est strictement croissante sur $[-1;2]$

Alors : $f(-1)\le f(x)\le f(2)$ et comme : $f(-1)=-(-1)^2+4\times(-1)+3=-2$ Et $f(2)=7$

Par suite : $-2\le f(x)\le 7$

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$

PROF: ATMANI NAJIB

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4\times(-1)\times 3 = 16 + 12 = 28 > 0$

$$x_1 = \frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2} = \frac{-4+2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2} = 2-\sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)} = \frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{-2} = \frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2} = 2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

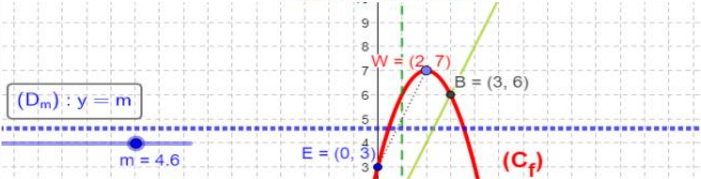
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

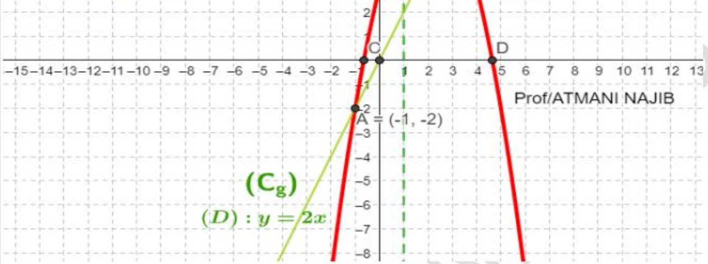
Et on a $f(0) = -0^2 + 4\times 0 + 3 = 3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

4) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :

PROF.ATMANI





5) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -1$ et $x = 3$ donc $S = \{-1; 3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 + 4x + 3 = 2x$ c'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1$; $b = 2$ et $c = 3$; $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$

Donc : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2+4}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \dfrac{-2-4}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$

Donc : $S = \{-1; 3\}$

6) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > 0$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (Ox) si $x \in \left]2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\right[$

Donc $S = \left]2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > 0$:

$f(x) > 0$ Signifie $-x^2 + 4x + 3 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 2 - \sqrt{7}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{7}$

PROF:ATMANI

x	$-\infty$		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$-x^2+4x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left]2-\sqrt{7};2+\sqrt{7}\right[$

7) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in \left]-1;3\right[$

Donc $S = \left]-1;3\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $f(x) > g(x)$:

$f(x) > g(x)$ Signifie : $-x^2+4x+3 > 2x$ C'est-à-dire : $-x^2+2x+3>0$

Les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S = \left]-1;3\right[$

8) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m>7$ l'équation n'admet pas de solution
Si : $m=7$ il y'a une solution c'est : x = 2
Si : $m<7$ il y'a deux solutions

Exercice21 : Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2-2x-3$ et $g(x) = -\dfrac{x+1}{x-1}$

(C_f) ; (C_g) Les courbes représentatives de f et g.

1) Donner le tableau de variations de f et g

2) a) Vérifier que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;0)$ et $B(2;-3)$

b) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3)Soit h la fonction définie sur $[-1;3]$ par : $h(x) = \dfrac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}$

a) Vérifier que : $h(x) = (g \circ f)(x) \quad \forall x \in [-1;3]$

b) Etudier la monotonie de h dans les intervalles : $[-1;1]$; $[1;3]$ puis dresser le tableau de variations

de h sur : $[-1;3]$

Solution : 1) a) $g(x) = -\dfrac{x+1}{x-1}$; on a $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Donc : $D_g = \mathbb{R}-\{1\}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 2 > 0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=-1$.

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=-3$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$: $\alpha = -\frac{-2}{2\times 1} = 1$ et $\beta = g(\alpha) = f(1) = 1^2 - 2\times 1 - 3 = -4$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W'(1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Donc le tableau de variations de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-4	↗

2) a) Vérifions que : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(-1;0)$ et $B(2;-3)$

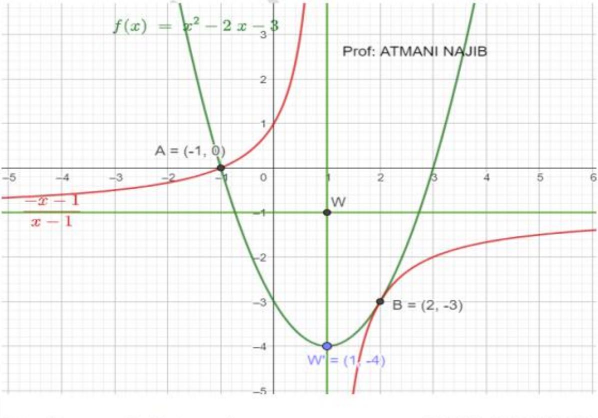
$f(-1)=0$ donc : $A(-1;0) \in (C_f)$ et $g(-1)=0$ donc : $A(-1;0) \in (C_g)$

Donc : $A(0;2) \in (C_f) \cap (C_g)$

$f(2)=-3$ donc : $B(2;-3) \in (C_f)$ et $g(2)=-3$ donc : $B(2;-3) \in (C_g)$

Donc : $B(2;-3) \in (C_f) \cap (C_g)$

b) Traçage des courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



ATMANI NAJIB

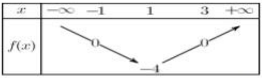
3)Soit h la fonction définie sur $[-1;3]$ par : $h(x)=\frac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}$

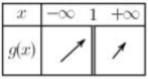
a) Vérifions que : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in[-1;3]$

Soit : $x\in[-1;3]$; $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-\frac{f(x)+1}{f(x)-1}=\frac{-x^2+2x+3-1}{x^2-2x-3-1}=\frac{-x^2+2x+2}{x^2-2x-4}=h(x)$

Donc : $h(x)=(g\circ f)(x)\quad \forall x\in[-1;3]$

b) → Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[-1;1]$



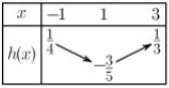


Puisque f est décroissante sur $[-1;1]$ et $f([-1;1])=[-4;0]$ et g est croissante sur $[-4;0]$ alors $h=g\circ f$ est décroissante sur $[-1;1]$

→ Etude de la monotonie de h dans l'intervalle : $[1;3]$

Puisque f est croissante sur $[1;3]$ et $f([1;3])=[-4;0]$ et g est croissante sur $[-4;0]$ alors $h=g\circ f$ est croissante sur $[1;3]$

→Le tableau de variations de h sur $[-1;3]$:



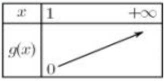
Exercice22 : Soit la fonction h définie sur $[1;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x^3-1}$

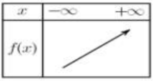
1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.
2) Déterminer les variations de h.

Solution :1) La fonction h se décompose de cette façon : $h=g\circ f$

On a alors : $f(x)=x^3$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

2)





On sait que : ⇨ f est croissante sur $[1;+\infty[$

On a : $f([1;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ En effet : $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow x^3\geq 1^3\Rightarrow x^3\geq 1\Rightarrow f(x)\in[1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

⇨et comme g est croissante sur $[1;+\infty[$

Alors : La fonction h croissante sur $[1;+\infty[$

Exercice23 : Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x)=x^2-2x+2$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x+3-2\sqrt{x+1}$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur $[0;+\infty[$

c) Soit : $a\in[1;+\infty[$; Montrer que : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\rightarrow f(x)=x^2-2x+2$; $D_f=\mathbb{R}$: On a $a=1>0$; $b=-2$ et $c=2\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=1$ et $(f(1)=1)$

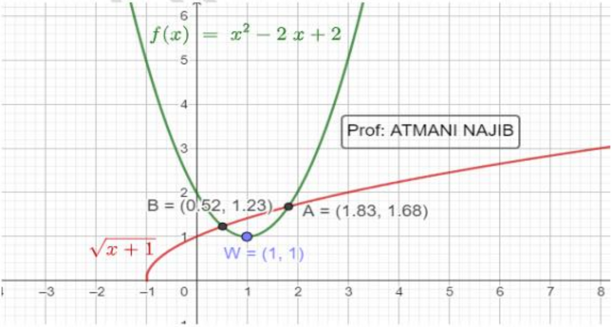
Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

$\rightarrow g(x)=\sqrt{x+1}$; $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x+1\ge0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\ge-1\}=[-1;+\infty[$

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	0	↗

2) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère



Prof: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

3) Soit : h une fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=x+3-2\sqrt{x+1}$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[0;+\infty[$

Soit : $x\in[0;+\infty[$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2-2g(x)+2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2\sqrt{x+1}+2=x+1-2\sqrt{x+1}+2=x+3-2\sqrt{x+1}=h(x)$

b) Déduisons les variations de h sur $[0;+\infty[$

Puisque g est croissante sur $[0;+\infty[$ et $g([0;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$ alors h est croissante sur $[0;+\infty[$

c) Soit : $a\in[1;+\infty[$; Montrons que : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2}$

Puisque : h est croissante sur $[0;+\infty[$

$a\in[1;+\infty[\ \Rightarrow a\ge 1\Rightarrow a-1\ge 0$

On : $a-1\le a$ et puisque : h est croissante sur $[0;+\infty[$

Alors : $h(a-1)\le h(a)$

Alors : $a-1+3-2\sqrt{a-1+1}\le a+3-2\sqrt{a+1}$

Alors : $a-2\sqrt{a}+2\le a+3-2\sqrt{a+1}$

Alors : $-2\sqrt{a}\le 1-2\sqrt{a+1}$

Alors : $2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\le 1$ Alors : $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\le\frac{1}{2}$

Exercice24: 1) Calculer : $E(4.2)$; $E(-3.26)$; $E(\sqrt{3})$; $E\left(\frac{1}{2}\right)$; $E(\pi)$

2) Déterminer : $E\left(3+\frac{1}{n}\right)$ si $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Solutions : 1) On a : $4\le 4.2\prec 4+1$ donc $E(4.2)=4$

On a : $-4\le -3.26\prec -3$ donc $E(-3.26)=-4$

On a : $0\le\frac{1}{2}\prec 1$ donc $E\left(\frac{1}{2}\right)=0$

On a : $3\le\pi\prec 3+1$ donc $E(\pi)=3$

2) On a : $n\ge 2$ alors : $0\le\frac{1}{n}\prec 1$ donc : $E\left(\frac{1}{n}\right)=0$

$E\left(3+\frac{1}{n}\right)=3+E\left(\frac{1}{n}\right)=3+0=3$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien