http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°5 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Soit la fonction f définie par : $f\left(x\right)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}$

1)a) Déterminer D_f

b) Calculer : $f\left(0\right)$; $f\left(-3\right)$

c) Déterminer les antécédents de 0 et 1 par f (s'ils existent)

4) On considère la fonction g définie par : $g\left(x\right)=\sqrt{-x^2+2x+24}$ Montrer que : $f=g$

Solution : 1) a) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,4+x\geq 0\ \ et\ \ 6-x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq -4\ \ et\ \ x\leq 6\right\}$ Donc $D_f=\left[-4,6\right]$

b) Calcul des images :

$f\left(0\right)=\sqrt{4+0}\times\sqrt{6-0}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ et $f\left(-3\right)=\sqrt{4-3}\times\sqrt{6+3}=\sqrt{1}\times\sqrt{9}=3$

c)

• x est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de x par f .

Équivaut à: chercher les réels x tels que : $f\left(x\right)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f\left(x\right)=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}=0$ ou $\sqrt{6-x}=0$

Équivaut à : $4+x=0$ ou $6-x=0$

Équivaut à : $x=-4$ ou $x=6$

Finalement les antécédents de 0 par f sont : -4 et 6.

• x est l'antécédents de 1 par f signifie que 1 est l'image de x par f .

Équivaut à : chercher les réels x tels que : $f\left(x\right)=1$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f\left(x\right)=1$

Équivaut à : $\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=0\Leftrightarrow\left(4+x\right)\left(6-x\right)=1\Leftrightarrow 24-4x+6x-x^2=1$

Équivaut à : $-x^2+2x+23=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+4\times\left(-23\right)=4+92=96>0$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{96}}{2\times -1}=\frac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $x_1=\frac{-2-\sqrt{96}}{2\times -1}=\frac{2+\sqrt{96}}{2}$

Finalement les antécédents de 1 par f sont : $\frac{2-\sqrt{96}}{2}$ et $\frac{2+\sqrt{96}}{2}$

4) On considère la fonction g définie par : $g\left(x\right)=\sqrt{-x^2+2x+24}$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,-x^2+2x+24\geq 0\right\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 24\times -1=4+96=100>0$

PROF: ATMANI NAJIB

$x_1=\frac{-2+\sqrt{100}}{2\times-1}=\frac{8}{-2}=-4$ et $x_2=\frac{-2-\sqrt{100}}{2\times-1}=\frac{-12}{-2}=6$

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$-x^2+2x+24$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_g=[-4,6]$

On a donc : $D_f=D_g$.

$f(x)=\sqrt{4+x}\times\sqrt{6-x}=\sqrt{(4+x)(6-x)}=\sqrt{-x^2+2x+24}=g(x)$

Conclusion : $f=g$

Exercice2 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. 3) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

4) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$ 5) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}}$ 6) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$.

7) $f(x)=\frac{2\sin x+\cos x}{|x^2-4x+5|-1}$ 8) $f(x)=\frac{8\sin 3x+\cos 3x}{2\cos x-\sqrt{3}}$ 9) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

Solution : 1) $f(x)=3x^2-x+1$ f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0\Leftrightarrow x(x^2-2)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-2=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x^2=2$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

3) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0 \Leftrightarrow -3x\geq -6 \Leftrightarrow x\leq\frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x\leq 2$

Donc : $D_f=]-\infty;2]$

4) $f(x)=(3x^2+2)\sqrt{-\frac{1}{2}x^2+x-4}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-\frac{1}{2}x^2+x-4\geq 0\right\}$

$-\frac{1}{2}x^2+x-4$: Calculons son discriminant : $a=-\frac{1}{2}$; $b=1$; $c=-4$

Donc : $\Delta=b^2-4\times a\times c=1^2-4\times(-4)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1-8=-7<0$ et $a=-\frac{1}{2}<0$

Le tableau de signe est :

PROF: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$-\frac{1}{2}x^2+x-4$	$-$

Donc : $D_f=\varnothing$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{1-x^2}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \ et \ 1-x^2\neq 0\right\}$$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \ et \ x^2\neq 1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x^2+1}{1-x^2}\geq 0 \ et \ x\neq 1 \ et \ x\neq -1\right\}$$

Déterminons le signe de l'expression suivante : $F(x)=\frac{x^2+1}{1-x^2}$

Le numérateur est positif pour tout x, et le dénominateur est un trinôme du second degré de racines −1 et 1, on peut donc dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,1\right[$

6) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$: $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\geq 0 \ et \ x^2-x\neq 0\}$

$x-2\geq 0$ Signifie : $x\geq 2$ et $x^2-x\neq 0$

Signifie : $x(x-1)\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 0$ et $x\neq 1$

Donc : $D_f=\left[2,+\infty\right[-\{0;1\}=\left[2,+\infty\right[$

7) $f(x)=\frac{2\sin x+\cos x}{|x^2-4x+5|-1}$: $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x^2-4x+5|-1\neq 0\}$

$|x^2-4x+5|-1=0$ Signifie que : $|x^2-4x+5|=1$

Signifie que : $x^2-4x+5=1$ ou $x^2-4x+5=-1$

- Résolution de $x^2-4x+5=1$

$x^2-4x+5=1$ Signifie que : $x^2-4x+4=0$

Signifie que : $(x-2)^2=0$

Signifie que : $x-2=0$

Signifie que : $x=2$

La seule solution de $x^2-4x+5=1$ est 2.

- Résolution de $x^2-4x+5=-1$.

$x^2-4x+5=-1$ Signifie que : $x^2-4x+6=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-8$.

Ainsi l'équation $x^2-4x+6=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, seule solution : $x=2$

D'où : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 2\}=\mathbb{R}-\{2\}$

PROF. ATMANI NAJIB

8) $f(x)=\dfrac{8\sin 3x+\cos 3x}{2\cos x-\sqrt{3}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,2\cos x-\sqrt{3}\neq 0\right\}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \sin x\neq\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ x\neq\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ Avec : $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

9) $f(x)=\sqrt{|x+9|-3}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x+9|-3\geq 0\right\}$

$|x+9|-3\geq 0$ Signifie que : $|x+9|\geq 3$ Signifie que : $x+9\geq 3$ ou $x+9\leq -3$

Signifie que : $x\geq -6$ ou $x\leq -12$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-12\right]\cup\left[-6;+\infty\right[$

Exercice3 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x-3} & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2\sin x}{x^2+x-2} & si \quad x>0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Calculer : $f(\pi)$; $f(0)$; $f(-1)$

Solution : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}^-\,/\,x-3\neq 0\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}^{+*}\,/\,x^2+x-2\neq 0\right\}$

x^2+x-2 : $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 1\times(-2)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-1+3}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-1-3}{2}=-2$

Donc : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}^-\,/\,x\neq 3\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}^{+*}\,/\,x\neq 1\ et\ x\neq -2\right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty;0\right]\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Par suite : $D_f=\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) Calcul de : $f(\pi)$: On a : $\pi>0$

Donc : $f(\pi)=\dfrac{\pi^2\sin\pi}{\pi^2+\pi-2}=\dfrac{0}{\pi^2+\pi-2}=0$

Calcul de $f(0)$: On a : $0\leq 0$ donc : $f(0)=\dfrac{0^3+0+1}{0-3}=-\dfrac{1}{3}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1\leq 0$ Donc : $f(-1)=\dfrac{(-1)^3+(-1)+1}{(-1)-3}=\dfrac{1}{4}$

PROF. ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice4 : Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^{2025}+bx^{2023}+cx+3$

Si on sait que : $f(-3)=2$ calculer : $f(3)$

Solution : On a : $f(x)=ax^{2025}+bx^{2023}+cx+3$

Donc : $f(-x)=a(-x)^{2025}+b(-x)^{2023}+c(-x)+3$

Donc : $f(-x)=-ax^{2025}-bx^{2023}-cx+3$

Donc : $f(x)+f(-x)=6$ et comme : $f(-3)=2$

Donc : $f(-3)+f(3)=6$ et comme : $f(-3)=2$

Donc : $f(3)=6-f(-3)=6-2=\boxed{4}$

Exercice5 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=7-x^2$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$ 3) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

Solution :1) f est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=7-(-x)^2=7-x^2$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

2) $f(x)=\frac{3}{x}$; on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{3}{-x}=-\frac{3}{x}$
  $f(-x)=-f(x)$

Donc : f est une fonction impaire

3) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$: On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}-\{0\}$

On va donc montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $f(1)$et $f(-1)$

$f(1)=1+\frac{1}{1^2}=1+1=2$ et $f(-1)=-1+\frac{1}{(-1)^2}=-1+1=0$ donc : $f(-1)\neq f(1)$ et $f(-1)\neq -f(1)$

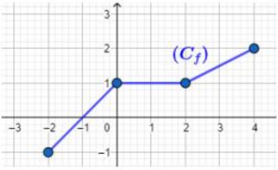
Par suite : f n'est ni paire ni impaire.

Exercice6 : La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f

Sur l'intervalle : $[-2,4]$

1) Déterminer les images des nombres : **-2 ; -1 ;0 ; 2 ; 4** par la fonction f

2) Déterminer : $f(x)$ en fonction de x sur $[-2,4]$



PROF: ATMANI NAJIB

Solution :1) $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et $f(2)=1$ et $f(4)=2$

2) On remarque que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des intervalles : $[-2,0]$ et $[0,2]$ et $[2,4]$

Donc la fonction f est affine sur ces intervalles

- Sur l'intervalle $[-2,0]$ on a : $f(x)=a_1x+b_1$
- Et on a : $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$

Donc : $\begin{cases}-2a_1+b_1=-1\\ -a_1+b_1=0\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}-a_1=-1\\ b_1=a_1\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}a_1=1\\ b_1=1\end{cases}$ Par suite : $f(x)=x+1$

- Sur l'intervalle $[0,2]$ on a : $f(x)=1$
- Sur l'intervalle $[2,4]$ on a : $f(x)=a_2x+b_2$
- Et on a : $f(2)=1$ et $f(4)=2$

Donc : $\begin{cases}2a_2+b_2=1\\ 4a_2+b_2=2\end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases}2a_2=1\\ b_2=2-4a_2\end{cases}$ Donc : $\begin{cases}a_2=\frac{1}{2}\\ b_2=2-2=0\end{cases}$ Par suite : $f(x)=\frac{1}{2}x$

Par conséquent : $\begin{cases}f(x)=x+1 & si \quad x\in[-2,0]\\ f(x)=1 & si \quad x\in[0,2]\\ f(x)=\frac{1}{2}x & si \quad x\in[2,4]\end{cases}$

Exercice7 : Soient les fonctions : $\begin{array}{l} f:\{-1;0\}\to\mathbb{R}\\ \quad x\mapsto 1+x\end{array}$; $\begin{array}{l} g:\{-1;0\}\to\mathbb{R}\\ \quad x\mapsto \sqrt{1-x^2}\end{array}$; $\begin{array}{l} h:\{-1;0\}\to\mathbb{R}\\ \quad x\mapsto -1+\sqrt{4+2x-x^2}\end{array}$

Comparer les fonctions f ; g et h

Solution : On a : $D_f=D_g=D_h=\{-1;0\}$

Et On a : $f(-1)=g(-1)=h(-1)=0$ et $f(0)=g(0)=h(0)=1$

Donc : $f=g=h$

Exercice8 : Soient les deux fonctions : $h(x)=\frac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

Comparer les fonctions h et t

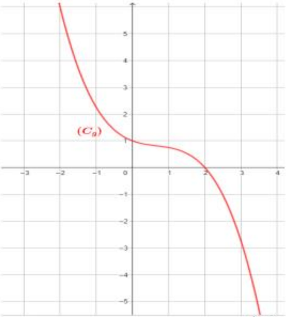
Solution :

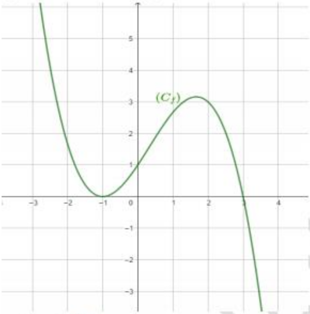
- On a $h(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$
- On a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

Donc : $h\neq t$

Exercice9 : Soient f et g deux fonctions définies par Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) si dessous : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{(x^2-x-2)\times f(x)}{(x^2-4)g(x-1)}\leq 0$

PROF: ATMANI NAJIB





Solution : Etudions le signe de : $\dfrac{(x^2-x-2)\times f(x)}{(x^2-4)\,g(x-1)}$

$x^2-x-2=0 \quad \Delta=1+8=9$: $x_1=\dfrac{1+\sqrt{9}}{2}=2$ et $x_1=\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\mp 2$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ et $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;3\right]$

$g(x-1)=0 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

$g(x-1)>0 \Leftrightarrow x-1<2 \Leftrightarrow x<3$

Voici donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		2		3		$+\infty$
$x2-x-2$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$f(x)$		+	|	+	0	+	|	+	0	−	
$x2-4$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
$g(x-1)$		+	|	+	|	+	|	+	0	−	
$Q(x)$		+	||	−	0	+	||	+	||	+	

Donc : $S=\left]-2;-1\right]$

Exercice10 : f est une fonction dont voici le tableau de variations

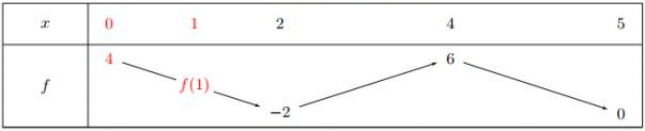
x	0		2		4		5
f	4	↘	-2	↗	6	↘	0

1) Comparer f(0) et f(1)
2) Comparer f(2,5) et f(3)
3) Comparer f(1) et f(4,5)

Solution : 1) Comparons f(0) et f(1) :

PROF ATMANI NAJIB

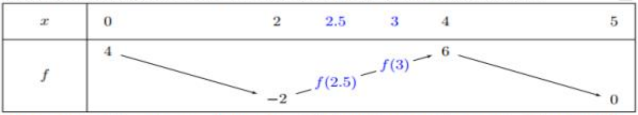
Si on place les images de 0 (qui était déjà placé) et 1 dans le tableau en respectant **l'ordre** :



On constate qu'ils sont sur une portion où la fonction est strictement décroissante donc f(0) > f(1)

2) Comparons : f(2,5) et f(3)

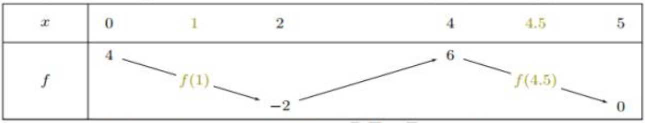
Si on place les images de 2,5 et 3 dans le tableau en respectant l'ordre :



On constate qu'ils sont sur une portion où la fonction est strictement croissante donc f(2.5) < f(3)

3) Comparons : f(1) et f(4,5)

Si on place les images de 1 et 4,5 dans le tableau en respectant l'ordre :



On constate qu'ils ne sont pas sur un intervalle où la fonction est monotone, on ne peut pas conclure !

Exercice11 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x-1}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Vérifier que f est périodique et π est une période de f

3) En déduire un domaine d'étude de f : D_E

Solution : 1) →Déterminons D_f et étudions la parité de f

$f(x)=\dfrac{\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2\cos 2x-1\neq 0\}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ 2\cos 2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos 2x\neq\dfrac{1}{2}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos 2x\neq\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ 2x\neq-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ \ et\ \ 2x\neq\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \cos 2x\neq\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ x\neq-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ \ et\ \ x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\dfrac{\pi}{6}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

→Etudions la parité de f

☺ $x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{6} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ et $-x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$ et $-x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{6} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow -x \in D_f$

☺ $f(-x) = \frac{\sin(-2x)\cos(-2x)}{2\cos(-2x) - 1} = -\frac{\sin 2x \cos 2x}{2\cos 2x - 1} = -f(x)$

Donc : f une fonction impaire

2) Vérifions que f est périodique et π est une période de f

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{6} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$: $f(x+\pi) = \frac{\sin(2x+2\pi)\cos(2x+2\pi)}{2\cos(2x+2\pi) - 1} = \frac{\sin 2x \cos 2x}{2\cos 2x - 1} = f(x)$

Car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π et que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Donc : f est périodique et π est une période de f

3) Déduisons un domaine d'étude de f : D_E

Comme : f une fonction périodique et π est une période de f et paire on choisit un intervalle d'étude :

$D_E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap D_f = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice12 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 3$

Tel que : $f(x) = |x-2| \quad \forall x \in [0;3[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;9[$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

2) Calculer : $f(9,78)$; $f(-8,75)$; $f(2023)$

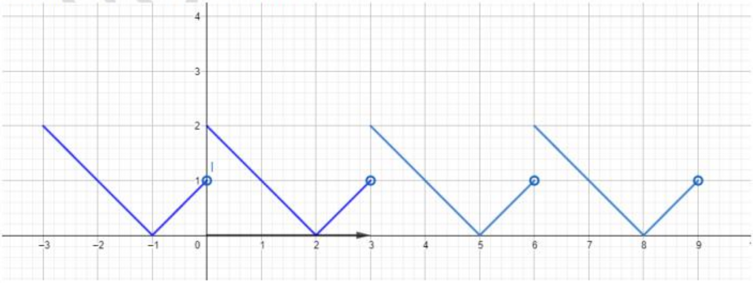
3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k = [3k;3(k+1)[\; k \in \mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0 = [0;3[$:

$$\begin{cases} f(x) = x - 2 & si \; x \in [2;3[\\ f(x) = -x + 2 & si \; x \in [0;2] \end{cases}$$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;9[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0 = [0;3[$ et utiliser les translation $3k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

PROF: ATMANI NAJIB



2) →Calculons : $f(9,78)$

$f(9,78)=f(9+0,78)=f(3\times 3+0,78)=f(0,78)$ car f est une fonction périodique de période $T=3$

Et puisque : $0,78\in[0;3[$ alors : $f(9,78)=f(0,78)=|0,78-2|=1,22$

→Calculons : $f(-8,75)$

$f(-8,75)=f(-9,75+1)=f(-9-0,75+1)=f(-3\times 3+0,25)=f(0,25)$ car f est une fonction périodique de période $T=3$

Et puisque : $0,25\in[0;3[$ alors : $f(-8,75)=f(0,25)=|0,25-2|=1,75$

→Calculons : $f(-8,75)$

$f(2023)=f(3\times 674+1)=f(1)$ car f est une fonction périodique de période $T=3$

Et puisque : $1\in[0;3[$ alors : $f(2023)=f(1)=|1-2|=1$

3) l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[3k;3(k+1)[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[3k;3(k+1)[\Leftrightarrow 3k\leq x\prec 3(k+1)$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\leq x-3k\prec 3\Leftrightarrow f(x-3k)=f(x)$

$x\in I_k\Leftrightarrow f(x)=|x-3k-2|\ \ k\leq\dfrac{x}{2}\prec k+1$ Avec : $3k\leq x\prec 3(k+1)\Leftrightarrow k\leq\dfrac{x}{3}<k+1\Leftrightarrow E\left(\dfrac{x}{3}\right)=k$

Exercice13 : En utilisant les fonctions usuelles ; Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $f(x)=-2x-100$ 2) $g(x)=\dfrac{-4}{x}$ 3) $h(x)=-2x^3+2027$ 4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$

Solution : 1) $f(x)=-2x-100$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v:x\rightarrow x$

On sait que la fonction $v:x\rightarrow x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $-2<0$ donc la fonction $-2v$ est aussi décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f=-2v+(-100)$ aussi décroissante sur $\mathbb{R}$

2) $g(x)=\dfrac{-4}{x}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

PROF. ATMANI NAJIB

On sait que : $v : x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et $g=-4v$

Alors : g est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-4<0$

3) $h(x)=-2x^3+2027$ et $D_f=\mathbb{R}$: On sait que : $v : x \to x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

On a : $h=-2v+2027$

Puisque la fonction v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors : $-2v$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc : $h=-2v+2027$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-2<0$

4) $k(x)=2001\sqrt{x-2}+2024$: $D_k=[2;+\infty[$

Puisque la fonction $v : x \to \sqrt{x-2}$ est croissante sur $[2;+\infty[$

Donc : $k=2001v+2024$ est croissante sur $[2;+\infty[$ car $2001>0$

Exercice14 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) a) Soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

b) En déduire la monotonie de la fonction f sur les intervalles $I=]-\infty;1[$ et $J=]1;+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Comparer les deux nombres : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Solution :1) $D_f=\{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_f=\{x \in E / x-1 \neq 0\}$

$D_f=\{x \in E / x \neq 1\}$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2) a) Soient $x_1 \in \mathbb{R}-\{1\}$ et $x_2 \in \mathbb{R}-\{1\}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrons que : $T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1x_2-x_1-x_2x_1+x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}\frac{1}{(x_1-x_2)}=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$

b)

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;1[$

Soient : $x_1 \in \left]-\infty;1\right[$ et $x_2 \in \left]-\infty;1\right[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Donc : $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases}$

Donc : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$

Donc : $\dfrac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $I = \left]-\infty;1\right[$

- Déduction de la monotonie de la fonction f sur l'intervalle $J = \left]1;+\infty\right[$

Soient : $x_1 \in \left]1;+\infty\right[$ et $x_2 \in \left]1;+\infty\right[$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Donc : $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases}$

Donc : $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$

Donc : $\dfrac{-1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$

Et par suite f est strictement décroissante sur : $J = \left]1;+\infty\right[$

5) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

4) Comparons les deux nombres : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

On a : $\sqrt{2} \in \left]1;+\infty\right[$ et $\sqrt{3} \in \left]1;+\infty\right[$ et $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ et f est strictement décroissante sur : $J = \left]1;+\infty\right[$

Donc : $f\left(\sqrt{2}\right) > f\left(\sqrt{3}\right)$

Donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Exercice15 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

1) Démontrer que f est majorée par 2 et minorée par $-\dfrac{1}{2}$

2) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ ; u(x) = \sqrt{x}$

a) Déterminer la fonction v telle que : $f = v \circ u$

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

Solution :1) $D_f = \left[0;+\infty\right[$

2) Montrons donc que : $f(x) \leq 2$ et $-\frac{1}{2} \leq f(x)$ dans $\mathbb{R}^+$

$f(x)-2=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-2=\frac{-5}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc : $f(x)<2$ dans $\mathbb{R}^+$

Donc : f est majorée par 2

$f(x)+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\geq 0$

Donc : $-\frac{1}{2}\leq f(x)$ dans $\mathbb{R}^+$

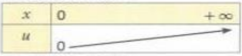
Donc : f est minorée par $-\frac{1}{2}$

2)a) Déterminer la fonction v telle que : $f=v\circ u$

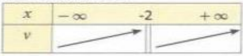
On a : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=\frac{2u(x)-1}{u(x)+2}$; on pose $v(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

Donc $f(x)=(v\circ u)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

▸ Tableau de variation de u



▸ Tableau de variation de v



- Puisque u est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
- si $x\in[0;+\infty[$ $u(x)\geq 0$ alors : $u(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$
- v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Alors $f=v\circ u$ est décroissante sur $[0;+\infty[$

Exercice16 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$

3) Démontrer que f est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

Donc : $0\leq f(x)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$

PROF. ATMANI NAJIB

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ donc $1+\frac{1}{\sqrt{x}}>1$

Donc : $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}>1$ donc $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1>2$

Donc : $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}<\frac{1}{2}$ par suite : $f(x)<\frac{1}{2}$ rt on a : $f(0)=0<\frac{1}{2}$

Donc : si $x\in\mathbb{R}^{+}$: $f(x)<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : f est minorée par $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+}$

Conclusion : $0<f(x)<\frac{1}{2}$ si $x\in\mathbb{R}^{+}$: f est bornée sur $\mathbb{R}^{+}$

Exercice17 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}$

1) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+}$; $2x-\sqrt{x}+1>0$

b) Déduire que : $D_f=\mathbb{R}^{+}$

2) a) Montrer que : la fonction f est minorée ; 0 est-elle valeur minimale de f ?

b) Montrer que 2 est la valeur maximale de f

Solution : 1) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+}$; $2x-\sqrt{x}+1>0$

Soit $x\in\mathbb{R}^{+}$:

$$2x-\sqrt{x}+1=2\sqrt{x}^{2}-\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}^{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)+1=2\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^{2}-\frac{1}{16}\right)+1$$

$2x-\sqrt{x}+1=2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^{2}+\frac{7}{8}>0$ car : $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^{2}\geq 0$ et $\frac{7}{8}>0$

b) Déduisons que : $D_f=\mathbb{R}^{+}$

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}$$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^{+}$ *et* $2x-\sqrt{x}+1\neq 0$ comme : $2x-\sqrt{x}+1>0$ alors : $2x-\sqrt{x}+1\neq 0$

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^{+}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^{+}$

PROF ATMANI NAJIB

2) a) Montrons que : la fonction f est minorée

Soit $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}>0$ car $2\sqrt{x}+1>0$ et $2x-\sqrt{x}+1>0$

Donc : la fonction f est minorée par 0

Mais : $f(x)\neq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$ par suite :0 n'est pas valeur minimale de f

b) Montrons que 2 est la valeur maximale de f : Soit $x \in \mathbb{R}^+$:

$$2-f(x)=2-\frac{2\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{4x-2\sqrt{x}+2-2\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{4x-4\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2-4\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}+1}=\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)^2}{2x-\sqrt{x}+1}\geq 0$$

Car : $\left(2\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ et $2x-\sqrt{x}+1>0$: $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x)=2 \Leftrightarrow 2-f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)^2}{2x-\sqrt{x}+1}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $f(x)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)=2$

Par suite : $f\left(\frac{1}{4}\right)=2$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}^+$

Exercice18 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+4x-3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\leq 1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4=-\left(x^2-4x+4\right)=-(x-2)^2\leq 0$

Donc $f(x)\leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et on a :

$f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Donc : 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\leq f(2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $f(2)=1$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exercice19 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x$

1)Déterminer D_f

2) a) Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 \neq x_2$

Montrer que : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{4}(x_1+x_2)+1$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$

c) Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$

3)a) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ses éléments caractéristiques

b) Dresser le Tableau de variations de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in\mathbb{R}$ On a : $f(x)\geq -1$

b) En déduire que : pour tout $x\in\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ On a : $5\leq f(x)\leq \dfrac{9}{16}$

c) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$ On a : $-1\leq f(x)\leq \dfrac{5}{4}$

5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=2x$

Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

7)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

---

8) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $g(x)<f(x)$

9)Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $x^2+4x=4m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+x$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(\frac{1}{4}x_2^{\,2}+x_2\right)-\left(\frac{1}{4}x_1^{\,2}+x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{4}x_2^{\,2}+x_2-\frac{1}{4}x_1^{\,2}-x_1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}\left(x_2^{\,2}-x_1^{\,2}\right)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{1}{4}(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1\right)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{4}(x_2+x_1)+1$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-2;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-2;+\infty[$ et $x_2\in[-2;+\infty[$ alors : $x_1\geq -2$ et $x_2\geq -2$ et $x_1\neq x_2$ donc : $x_1+x_2>-4$

Donc : $\dfrac{1}{4}(x_2+x_1)>-1$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1>0$.

Donc : $T(x_1;x_2)>0$ d'où : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-2]$ et $x_2\in]-\infty;-2]$ alors : $x_1\leq -2$ et $x_2\leq -2$ et $x_1\neq x_2$

Cela implique : $x_1+x_2<-4$

Donc : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)<-1$

Par suite : $\frac{1}{4}(x_2+x_1)+1<0$.

Donc $T(x_1;x_2)<0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-2]$

3)a) dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet : $W(-2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=-2$

b) Tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

4) a) D'après le tableau de variation de f on a : $f(-2)=-1$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-2)\leq f(x)$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $-1\leq f(x)$

b) Soit : $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ alors : $-2\leq x\leq\frac{1}{2}$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement croissante sur $I=[-2;+\infty[$

Par suite : f est strictement croissante sur $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

Alors : $f(-2)\leq f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme : $f(-2)=-1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

Par suite : $5\leq f(x)\leq\frac{9}{16}$ si $x\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]$

b) Soit : $x\in[-5;-2]$ On a alors : $-5\leq x\leq -2$ or D'après le tableau de variation de f on a : f est strictement décroissante sur $J=]-\infty;-2]$

Par suite : f est strictement décroissante sur $[-5;-2]$

Alors : $f(-2) \leq f(x) \leq f(-5)$ et comme :

$f(-2) = -1$ Et $f(-5) = \frac{1}{4} \times (-5)^2 - 5 = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$ Par suite : $-1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$

Signifie $x\left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 0$ Signifie $x = 0$ ou $\frac{1}{4}x + 1 = 0$

Signifie $x = 0$ ou $x = -4$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$O(0;0)$ et $A(-4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

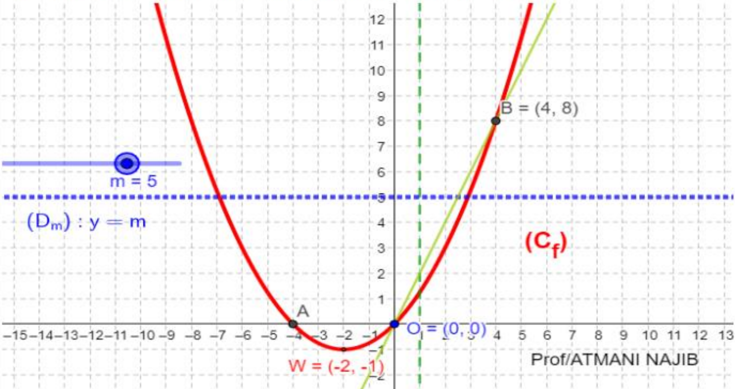
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0) = \frac{1}{4}(0)^2 + 0 = 0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

6)Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = 2x$

Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:



7) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = 0$ et $x = 4$ donc $S = \{0;4\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $\frac{1}{4}x^2 + x = 2x$ c'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2 - x = 0$ Signifie $x\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$

Signifie $x = 0$ ou $\frac{1}{4}x - 1 = 0$

Signifie $x = 0$ ou $x = 4$

Donc : $S = \{0;4\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$:

La courbe (C_g) est au-dessus de (C_f) si $x \in [0;4]$

Donc $S = [0;4]$

b) Résolution algébrique de l'inéquation : $g(x) \geq f(x)$:

$g(x) \geq f(x)$ Signifie $\frac{1}{4}x^2 + x \leq 2x$

C'est-à-dire : $\frac{1}{4}x^2 - x \leq 0$

C'est-à-dire : $x^2 - 4x \leq 0$

Les racines sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S = [0;4]$

10) Détermination graphique du nombre de solutions de l'équation : $x^2 + 4x = 4m$ avec : $m \in \mathbb{R}$

$x^2 + 4x = 4m \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 4x}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}x^2 + x \Leftrightarrow m = f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et la droite : $y = m$

Si : $m > -1$ il y'a deux solutions

Si : $m = -1$ il y'a une solution c'est : x = -1

Si : $m<-1$ l'équation n'admet pas de solution

Exercice20 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

A) Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

B) On considère la fonction numérique g tel que : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$ et (C_g) sa courbe représentative

1) Etudier la parité de g
2) Que peut-on dire de la fonction f et de g sur $\mathbb{R}^+$
3) Dresser le Tableau de variations de g
4) Tracer les courbes représentative (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $g(x)=m$ avec : $m\in\mathbb{R}$

Solution : A) On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$: f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=\frac{1}{2}$; $b=-2$ et $c=3$

Donc : $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)}=2$ et $f(2)=\frac{1}{2}\times(2)^2-2\times2+3=2-4+3=1$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=2$

Comme : $\boxed{a=4>0}$ alors :

La fonction f est croissante sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;2]$

Tableau de variations de f : On a $a=\frac{1}{2}>0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

B) $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3$

1) Etudions la parité de g

a) si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

b) $g(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-2|-x|+3=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3=g(x)$

Donc : g est une fonction paire

Graphiquement (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|+3=\frac{1}{2}x^2-2x+3=f(x)$ car $|x|=x$

Résultat : (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$

PROF: ATMANI NAJIB

3) Tableau de variations de g :

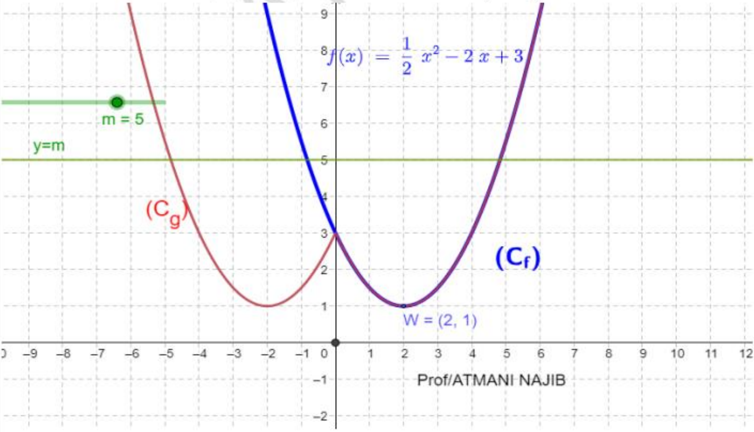
Du Tableau de variations de f et puisque g est paire on déduit le Tableau de variations de g :

$g(0)=3$ et $g(-2)=1$ et $g(2)=1$

t	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$g(x)$		↘	1	↗	3	↘	1	↗	

Puisque (C_g) et (C_f) coïncident sur $\mathbb{R}^+$ et (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

4)Alors on peut construire (C_f) et (C_g) dans un même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



5) Résolution graphique de l'équation $m=g(x)$ avec $m\in\mathbb{R}$:

Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de (C_g) et la droite : $y=m$

Si : $m<1$ il y'a pas de solution

Si : $m=1$ il y'a deux solutions : 2 et -2

Si : $1<m<3$ il y'a une 4 solutions

Si : $m=3$ il y'a trois solutions : 4 ;0 ;-4

Si : $m>3$ il y'a deux solutions

Exercice21 : Soient f et g deux fonctions numériques définies par :

$f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2) Vérifier que : $g(2)=f(2)$

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère en précisant les points d'intersections

4) Déterminer graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;2]$; $[2;+\infty[$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $2x-\sqrt{x-1}\geq x^2-1$

6) Soit : h une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

a) Vérifier que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

b) En déduire les variations de h sur $[1;+\infty[$ et dresser son tableau de variation

c) Soit : $a\in[3;+\infty[$; Montrer que : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq -\frac{1}{2}$

Solution : 1) → $f(x)=-x^2+2x+1$; $D_f=\mathbb{R}$ On a $a=-1<0$; $b=2$ et $c=1$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a}=1$ et $\left(f(1)=2\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $S(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	2	↘	

→ $g(x)=\sqrt{x-1}$; $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}=[1;+\infty[$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	

2) Vérifions que : $g(2)=f(2)$: $f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

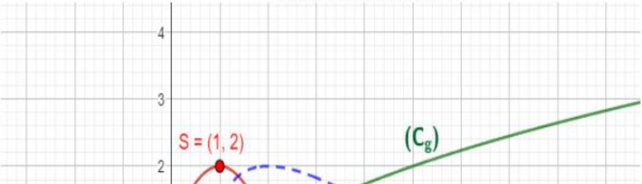
$f(2)=-2^2+2\times 2+1=-4+4+1=1$ et $g(2)=\sqrt{2-1}=1$

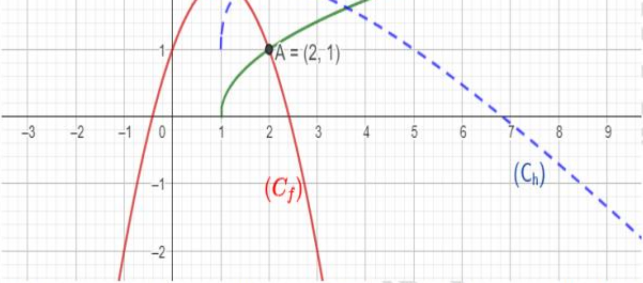
Donc : $g(2)=f(2)$

Graphiquement : (C_f) et (C_g) se coupent en : $A(2;1)$

3) Traçage des courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

PROF: ATMANI





4) Déterminons graphiquement l'image des intervalles suivants par g : $[1;2]$; $[2;+\infty[$

$g([1;2])=[0;1]$ et $g(\,[2;+\infty[)=[1;+\infty[$

5) Résolvons graphiquement l'inéquation : $x^2-4x+3\left(2-\sqrt{x}\right)<0$

Soit : $x\in[1;+\infty[$; $2x-\sqrt{x-1}\geq x^2-1\Leftrightarrow -x^2+2x+1\geq\sqrt{x-1}\Leftrightarrow f(x)\geq g(x)$

Graphiquement la courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in[1;2]$

Donc : $S=[1;2]$

6) a) Soit : h une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

a) Vérifions que : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in[1;+\infty[$

Soit : $x\in[1;+\infty[$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=-(g(x))^2+2g(x)+1=-\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1=-x+1+2\sqrt{x-1}+1=-x+2+2\sqrt{x-1}=h(x)$$

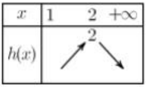
b) Déduisons les variations de h sur $[1;+\infty[$

→Puisque g est croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2])\subset[0;1]$ et f est croissante sur $[0;1]$ alors h est croissante sur $[1;2]$

→Puisque g est croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[$ et f est décroissante sur $[1;+\infty[$ alors h est décroissante sur $[2;+\infty[$

Le tableau de variation de h :

PROF: ATMANI NAJIB


x
1
2
$+\infty$
$h(x)$
2

Car : $h(2)=-2+2+2\sqrt{2-1}=2$

c) Soit : $a\in[3;+\infty[$; Montrons que : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq-\frac{1}{2}$

$a\in[3;+\infty[\ \Rightarrow a\geq3\Rightarrow a-1\geq2$

On : $a-1\leq a$ et puisque : h est décroissante sur $[2;+\infty[$

Alors : $h(a-1)\geq h(a)$ et $h(x)=-x+2+2\sqrt{x-1}$

Alors : $-a+1+2+2\sqrt{a-1-1}\geq-a+2+2\sqrt{a-1}$

Alors : $2\sqrt{a-2}\geq2\sqrt{a-1}-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{a-2}-2\sqrt{a-1}\geq-1\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\right)\geq-1$

Alors : $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-1}\geq-\frac{1}{2}$

Exercice22 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{6x^2+8x+11}{(x-1)^2}$

1) ä) Montrer que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=2+(g(x))^2$ où g est une fonction à déterminer

b) En déduire que : f est minorée sur D_f

c) f admet-elle un minimum absolu ? justifier

d) Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et tracer (C_g) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Étudier la monotonie de f dans les intervalles suivants : $]-\infty;1[$; $\left]1;\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) Dresser le tableau de variation de f et déterminer les extrémums de la fonction f.

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

1) ä) Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$:On a $f(x)=\dfrac{2(x^2-2x+1)+4x^2+12x+9}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=\dfrac{2(x^2-2x+1)+4x^2+12x+9}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)^2+(2x-3)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2}+\dfrac{(2x-3)^2}{(x-1)^2}$

Alors : $f(x)=2+\dfrac{(2x-3)^2}{(x-1)^2}=2+\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)^2$ avec : $g(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) Déduisons que : f est minorée sur D_f : Soit : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$: Montrons que : $2\leq f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Puisque : $f(x)=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$ alors : $f(x)-2=\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2 \geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : $2\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Par suite f est minorée sur $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

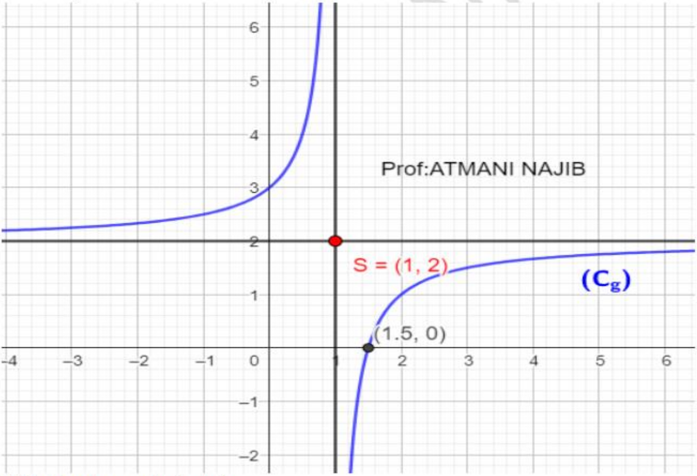
c) Comme : $f(x)-2=0\Leftrightarrow\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Alors : $f\left(\frac{3}{2}\right)=2$ et donc : $f\left(\frac{3}{2}\right)\leq f(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Donc : f admet-elle un minimum absolu c'est 2 en $\frac{3}{2}$

d) $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$; $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$: $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{vmatrix}=-2+3=1>0$

(C_g) est l'hyperbole de centre $S(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=2$.



2) Etudions la monotonie de f :

On a : $f(x)=2+\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^2$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$ avec : $g(x)=\frac{2x-3}{x-1}$;

On peut vérifier que : $f(x)=(h\circ g)(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$ avec : $h(x)=2+x^2$

Le tableau de variation de h : $h(x)=x^2+2$; $D_h=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=0$ et $c=2\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{0}{2\times 1}=0$ Et $\beta=h(0)=2$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_h\right)$ c'est une parabole de sommet $W(0;2)$ et d'axe de symétrie la droite : $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		↘	2	↗	

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		↗	‖	↗	

→Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left]-\infty;1\right[$

Puisque g est croissante sur $\left]-\infty;1\right[$ et $\forall x\in\left]-\infty;1\right[: g(x)\in\left]2;+\infty\right[$ (voir $\left(C_g\right)$) et h est croissante sur $\left]2;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left]-\infty;1\right[$

→ Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

Puisque g est croissante sur $\left]1;\frac{3}{2}\right]$ et $\forall x\in\left]1;\frac{3}{2}\right] : g(x)\in\left]-\infty;0\right]$ (voir $\left(C_g\right)$) et h est décroissante sur $\left]-\infty;0\right]$ alors $f=h\circ g$ est décroissante sur $\left]1;\frac{3}{2}\right]$

→ Etudions la monotonie de $f=h\circ g$ dans l'intervalle : $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Puisque g est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et $\forall x\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right[: g(x)\in\left[0;+\infty\right[$ (voir $\left(C_g\right)$) et h est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ alors $f=h\circ g$ est croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

c) le tableau de variation de f et les extrémums de la fonction f

→le tableau de variation de f

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↘	1	↗	

→Le nombre 1 est le minimum relatif de f en $\frac{3}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice23 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$

1) Calculer : $f(4)$; $f\left(\frac{9}{4}\right)$ 2) Déterminer le domaine de définition de f

3) Montrer que f est bornée 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

Solution :1) Calculons : $f(4)$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$; $f\left(-\frac{9}{2}\right)$

$f(4)=\frac{4-E(4)}{\sqrt{4}}=\frac{4-4}{2}=\frac{0}{2}=0$ car : $E(4)=4$

$f\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{\frac{9}{4}-E\left(\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{\frac{9}{4}-2}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{9}{4}-2}{\frac{3}{2}}$ car $E\left(\frac{9}{4}\right)=2$ en effet : $2\leq\frac{9}{4}<2+1$

$f\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

2) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\succ 0\}=\mathbb{R}^{*+}$

3)On a : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ $E(x)\leq x\leq E(x);$ $\Rightarrow 0\leq x-E(x)$ $\Rightarrow\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}\geq 0$ donc : f est minorée

Si : $x\in[0;1[\Leftrightarrow 0\leq x\prec 1$ Donc : $E(x)=0$

Donc : $f(x)=\frac{x-0}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\prec 1$ car $x\prec 1$

Si : $x\in[1;+\infty[\Leftrightarrow 1\leq x\Leftrightarrow 1\leq\sqrt{x}$

On a : $x-1\prec E(x)\leq x$ Donc : $-1\prec E(x)-x\leq 0$ Donc : $0\leq x-E(x)\prec 1$ et $1\leq\sqrt{x}$

Donc : $0\leq x-E(x)\prec\sqrt{x}$

Donc : $0\leq\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}\prec 1$ si $x\in[1;+\infty[$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ $0\leq\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}\prec 1$ c'est-à-dire : f est bornée

4) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow x-E(x)=0\ et\ x\succ 0\Leftrightarrow E(x)=x\ \ et\ x\succ 0\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow x\in\mathbb{N}^{*}$

D'où : $S=\mathbb{N}^{*}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB