1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

Correction série N°7 : Généralités sur les fonctions

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{-x+8}{4x^2-9}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$ 3) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+6}{x^2-4x-96}}$ 5) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$ 6) $f(x)=\dfrac{2\sin 3x-\cos x}{2\sin x-\sqrt{2}}$

Solution : 1) $f(x)=\dfrac{-x+8}{4x^2-9}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2-9\neq 0\right\}\Leftrightarrow D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/4x^2\neq 9\right\}\Leftrightarrow D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2\neq\dfrac{9}{4}\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq-\sqrt{\dfrac{9}{4}}\ \ et\ \ x\neq\sqrt{\dfrac{9}{4}}\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq-\dfrac{3}{2}\ \ et\ \ x\neq\dfrac{3}{2}\right\}$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x+6}{|x^2-2x+3|-2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|x^2-2x+3|-2\neq 0\right\}$

$|x^2-2x+3|-2=0$ Signifie que : $|x^2-2x+3|=2$

Signifie que : $x^2-2x+3=2$ ou $x^2-2x+3=-2$

- Résolution de $x^2-2x+3=2$

$x^2-2x+3=2$ Signifie que : $x^2-2x+1=0$

Signifie que : $(x-1)^2=0$

Signifie que : $x-1=0$

Signifie que : $x=1$

La seule solution de $x^2-2x+3=2$ est 1.

- Résolution de $x^2-2x+3=-2$.

$x^2-2x+3=-2$ Signifie que : $x^2-2x+5=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=-16$.

Ainsi l'équation $x^2-2x+5=0$ n'a aucune solution réelle

Au final, seule solution : $x=1$

D'où : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq 1\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq 0\right\}$

Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

PROF. ATMANI NAJIB

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1$ et $x_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $a=2$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

4) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+6}{x^2-4x-96}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{2x+6}{x^2-4x-96}\geq0\ et\ x^2-4x-96\neq0\right\}$$

On commence par déterminer les racines du trinôme $-x^2+4x+96$:

Le discriminant de $-x^2+4x+96$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 96 \times (-1) = 400$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{-4+\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4+20}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$ et $x_2=\frac{-4-\sqrt{400}}{2\times(-1)}=\frac{-4-20}{-2\times1}=\frac{-24}{-2}=12$

Donc le tableau des signes est :

x	$-\infty$		-8		-3		12		$+\infty$
$2x+6$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x+96$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x+6}{-x^2+4x+96}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $D_f=]-\infty;-8[\cup[-3;12[$.

5) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x+1|-1\geq0\}$

$|x+1|-1\geq0$ Signifie que : $|x+1|\geq1$ Signifie que : $x+1\geq1$ ou $x+1\leq-1$

Signifie que : $x\geq0$ ou $x\leq-2$

Donc : $D_f=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{2\sin3x-\cos x}{2\sin x-\sqrt{2}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\sin x-\sqrt{2}\neq0\}$

$$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ 2\sin x-\sqrt{2}\neq0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \sin x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ \sin x\neq\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ x\neq\frac{\pi}{4}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ Avec : $k\in\mathbb{Z}$

$x\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ \ x\neq\frac{\pi}{4}+2k\pi\ \ et\ \ x\neq\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ Avec : $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice2 : Soit f la fonction numérique tel que : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{x+2} & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(4-x)} & si \quad x\succ 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_f

2) Calculer : $f(2)$; $f(0)$; $f(-1)$

Solution : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}^-/x+2\neq 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^{+*}/(x+1)(4-x)\neq 0\}$

Donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}^-/x\neq -2\}\cup\{x\in\mathbb{R}^{+*}/x\neq -1 \ et \ x\neq 4\}$

Donc : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;0]\cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

Par suite : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;4[\cup]4;+\infty[$

2) Calcul de : $f(2)$: On a : $2\succ 0$

Donc : $f(2)=\dfrac{2^2}{(2+1)(4-2)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Calcul de $f(0)$: On a : $0\leq 0$ donc : $f(0)=\dfrac{0-1}{0+2}=\dfrac{-1}{2}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1\leq 0$

Donc : $f(-1)=\dfrac{-1-1}{-1+2}=\dfrac{-2}{1}=-2$

Exercice3 : Soit f la fonction numérique tel que : $f\left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right)=\dfrac{8x+12}{9x-6}$

Calculer : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Solution : On a : $f\left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right)=\dfrac{8x+12}{9x-6}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2x+3}{3x-2}\right)$

On pose : $t=\dfrac{3x-2}{2x+3}$

Donc : $f(t)=\dfrac{4}{3t}$ par suite : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$

Exercice4 : Soient les deux fonctions : $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x)=\dfrac{1-4x}{1-2x}$

1) Comparer les fonctions f et g

2) En déduire les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g

3) En déduire une comparaison des nombres : $A=\dfrac{1,0000002}{1,0000004}$ et $B=\dfrac{0,9999996}{0,9999998}$

Solution : 1) $\rightarrow x\in D_f \Leftrightarrow 1+4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{4}$; Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

$x\in D_g\Leftrightarrow 1-2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$; Donc : $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$

PROF. ATMANI NAJIB

On peut dire que : $f \neq g$ car : $D_f \neq D_g$

$\rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1+2x}{1+4x}-\frac{1-4x}{1-2x}=\frac{(1+2x)(1-2x)-(1+4x)(1-4x)}{(1+4x)(1-2x)}=\frac{1-4x^2-1+16x^2}{(1+4x)(1-2x)}=\frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$

Tableau de signe de : $f(x)-g(x)=\frac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$12x^2$		+		+	0	+		+	
$(1+4x)$		−	0	+		+		+	
$(1-2x)$		+		+		+	0	−	
$f(x)-g(x)$		−	‖	+	0	+	‖	−	

$f(x)-g(x)>0 \iff x \in \left]-\frac{1}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$

Donc : $f > g$ sur $\left]-\frac{1}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$ et $f \leq g$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right]$

2) Déduisons les positions de (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives de f et g :

Par conséquent : (C_f) est confondue avec (C_g) pour : x = 0

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\frac{1}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right]$

(C_f) Est située au-dessus de (C_g) sur : $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right]$

2) Déduisons une comparaison des nombres : $A=\frac{1,0000002}{1,0000004}$ et $B=\frac{0,9999996}{0,9999998}$

Comme : $x=10^{-7} \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ alors : $f(10^{-7})-g(10^{-7})>0$

On a : $f(10^{-7})=\frac{1+2\times10^{-7}}{1+4\times10^{-7}}=\frac{1,0000002}{1,0000004}=A$ et $g(10^{-7})=\frac{1-4\times10^{-7}}{1-2\times10^{-7}}=\frac{0,9999996}{0,9999998}=B$

Alors : $f(10^{-7})>g(10^{-7})$ c'est-à-dire : $A>B$

Exercice5 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$ 2) $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ 3) $T(x)=|2-x|+|x+2|$

Solution : 1) $f(x)=\frac{x|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-1\neq0$

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- $f(-x)=\frac{-x|-x|}{(-x)^2-1}=-\frac{x|x|}{x^2-1}$

$f(-x)=f(x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : f est une fonction impaire

2) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$: On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $1+x^2\neq 0$

$1+x^2=0$ Équivaut à: $x^2=-1$ impossible par suite : $D_f=\mathbb{R}$

On va donc montrer que f n'est ni paire ni impaire.

Calculons par exemple $f(1)$ et $f(-1)$

$f(1)=\dfrac{1+1}{1+1^2}=\dfrac{2}{2}=1$ et $f(-1)=\dfrac{1-1}{1+(-1)^2}=\dfrac{0}{2}=0$ donc : $f(-1)\neq -f(1)$

Par suite : f n'est ni paire ni impaire

3) $T(x)=|2-x|+|x+2|$

a) On a : $D_T=\mathbb{R}$

b) si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

$T(-x)=|2-(-x)|+|-x+2|=|2+x|+|-(x-2)|$

$T(-x)=|2+x|+|x-2|$ car : $|-X|=|X|$

$T(-x)=|x-2|+|2+x|$

Donc : $T(-x)=T(x)$

Donc : T est une fonction paire,

Exercice6 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

1) Déterminer D_f 2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$; Conclure.

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=\mathbb{R}^+$

2) soit $x\in\mathbb{R}^+$ on a $x+\sqrt{x}\geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}$ donc $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\geq 0$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) Soit $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}\geq 0$

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}$$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\succ 0$ donc $1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\succ 1$

Donc : $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\succ 1$ donc $\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1\succ 2$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)} \prec \frac{1}{2}$ par suite : $f(x) \prec \frac{1}{2}$

Et on a : $f(0)=0 \prec \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ $f(x) \prec \frac{1}{2}$

Par suite f est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion : $0 \prec f(x) \prec \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+}$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^{+}$.

Exercice7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

Montrer que : f est bornée

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a : $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x+1)^2 \geq 0$

Donc : $x^2-2x+1 \geq 0$ et $x^2+2x+1 \geq 0$

Donc : $x^2+1 \geq 2x$ et $x^2+1 \geq -2x$

Donc : $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$ et $\frac{2x}{x^2+1} \geq -1$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq f(x) \leq 1$

Conclusion : f est bornée

Exercice8 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que f est minorée.
b) Est ce que f admet une valeur minimale ?
2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f=\mathbb{R}$

1) a) $f(x)=x^2-2x+3=\left(x^2-2x+1\right)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2 \geq 0$

Donc : $f(x) \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

b) On a : $f(1)=2$ donc : $f(x) \geq f(1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2
2) Démontrons que f est non majorée.
Supposons f majorée donc : $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2+2 \leq M \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq M-2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{M-2}$ (On peut toujours supposer $M \geq 2$)
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2} \leq x-1 \leq \sqrt{M-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1 \leq x \leq \sqrt{M-2}+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ absurde

PROF: ATMANI NAJIB

Donc f est non majorée

Exercice9 : une personne a acheté un terrain rectangulaire de périmètre 40 m a un prix Égal à 200000dh

Déterminer les dimensions de ce terrain pour le prix du mètre carré soit minimale

Solution : Soit x ; y les dimensions de ce terrain rectangulaire

Soit S son aire et P son périmètre

$P = 40 = 2(x+y) \Rightarrow x+y=20$

$S = x \times y = x \times (20-x) = -x^2 + 20x$

Soit : P_u le prix d'un mètre carré ; P_T le prix Total de ce terrain

Donc : $P_T = P_u \times S$ avec : $P_T \succ 0$ et $S \succ 0$

Donc : $P_u = \frac{P_T}{S}$ avec : $P_T \succ 0$ et $S \succ 0$

Donc : le prix du mètre carré est minimal si et seulement si : S est maximale

Etudions les variations de $S(x) = -x^2 + 20x$

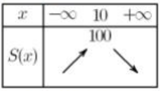
On a S est une fonction polynôme

On a $a=-1$ et $b=20$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $-\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2\times(-1)} = 10$ et $\left(f(10)=100\right)$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(10;100)$ et d'axe de symétrie la droite $x=10$

Donc le tableau de variations de S



S est maximale pour : $x=10$ et comme : $x+y=20$ alors : $y=10$

Le prix du mètre carré est minimal pour : $x=10$ et $y=10$

Exercice10 : Soit f une fonction tel que : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

1) Etudier la parité de f

2) Étudier les variations de f sur $I=[0,1]$ et sur $J=[1;+\infty[$

3) En déduire les variations de f sur D_f

4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

5) Déduire que f est bornée sur D_f

Solution : 1) On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à : $x^2+1\neq 0$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ Impossible

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

PROF: ATMANI NAJIB

- $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) Soient : x_1 et x_2 deux réels tel que : $x_1 \neq x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_1-x_2-x_1\times x_2(x_1-x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\times x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)(1-x_1\times x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}\times\dfrac{1}{x_1-x_2}=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

a) Sur $I=[0,1]$

Soit $x_1\in[0,1]$ et $x_2\in[0,1]$ et $x_1\neq x_2$

Donc : $0\le x_1\le 1$ et $0\le x_2\le 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $0\le x_1x_2<1$ car $x_1\neq x_2$

Donc $1-x_1\times x_2>0$ par suite : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}>0$ car $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

D'où : f est strictement croissante sur $I=[0,1]$

b) Sur $J=[1;+\infty[$: Soient $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$.

Donc $x_1\ge 1$ et $x_2\ge 1$ Donc $x_1x_2\ge 1$ et $x_1\neq x_2$

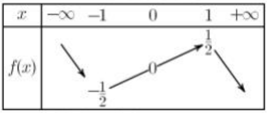
Donc $1-x_1\times x_2<0$ par suite : $T(x_1;x_2)=\dfrac{1-x_1\times x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}<0$ car $(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$

D'où : f est strictement décroissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=[0,1]$ est l'intervalle $I'=[-1,0]$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Puisque : f est strictement croissante sur I alors f est strictement croissante sur I'
Puisque : f est strictement décroissante sur J alors f est strictement décroissante sur J'

4) Par suite le tableau de variations de f sur D_f est :



$f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$; $f(-1)=-f(1)=-\dfrac{1}{2}$

5)D'après le tableau de variations de f: en déduit que :

$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ est un minimum absolu de f sur $\mathbb{R}$ et $f(1)=\dfrac{1}{2}$ est un maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $f(-1)\le f(x)\le f(1)$

PROF ATMANI NAJIB

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

Par suite f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 : Montrer que la fonction : $f(x) = \sin 2x - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ est périodique de période 4π.

Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+4\pi) = \sin(2x+8\pi) - 2\cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \sin(2x+4\times 2\pi) - 2\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$$

$f(x+4\pi) = \sin(2x) - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$) car on sait que la fonction Cosinus est périodique de période 2π.

Et t que la fonction Sinus est périodique de période 2π.

Ainsi, $f(x+4\pi) = f(x)$

La fonction f est donc périodique de période 4π.

Exercice 12 : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 1$

Tel que : $f(x) = x^2 \quad \forall x \in [0;1[$

1)Tracer la représentation graphique de la fonction sure : $I = [-3;3]$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

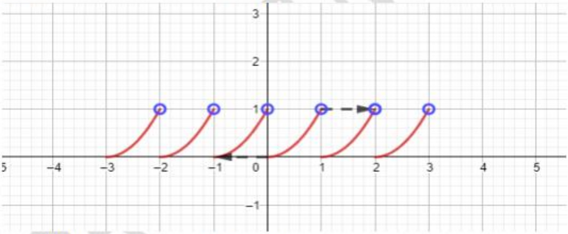
2) Calculer : $f(2,1)$; $f(-100,5)$; $f(2030,2)$

3) Donner l'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k = [k;k+1[\ k \in \mathbb{Z}$

Solution : Dans l'intervalle $I_0 = [0;1[$: On a : f est une fonction polynôme

Donc la courbe (C_f) c'est une portion de parabole.

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0 = [0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$



2) $\rightarrow f(2{,}1) = f(2+0.1) = f(2\times 1+0{,}1) = f(0{,}1)$ car f est périodique de période $T = 1$;

En effet : $f(k\times T + x) = f(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $f(2{,}1) = f(0{,}1)$ et puisque : $0{,}1 \in [0;1[$

Alors : $f(2{,}1) = f(0{,}1) = (0{,}1)^2 = 0{,}01$

PROF ATMANI NAJIB

$\rightarrow f(-100{,}5)=f(-101+0{,}5)=f(-101\times1+0{,}5)=f(0{,}5)$ car f est périodique de période $T=1$;

Donc : $f(-100{,}5)=f(0{,}5)=(0{,}5)^2=0{,}25$ car : $0{,}5\in[0;1[$

$\rightarrow f(2030{,}2)=f(2030+0{,}2)=f(2030\times1+0{,}2)=f(0{,}2)$ car f est périodique de période $T=1$;

Donc : $f(2030{,}2)=f(0{,}2)=(0{,}2)^2=004$ car : $0{,}12\in[0;1[$

3) L'expression de : $f(x)$ sur les intervalles : $I_k=[k;k+1[\ k\in\mathbb{Z}$

$x\in I_k=[k;k+1[\Leftrightarrow k\le x\prec k+1$

$x\in I_k\Leftrightarrow 0\le x-k\prec 1\Leftrightarrow f(x-k)=(x-k)^2$

Or : f est périodique de période $T=1$ alors : $f(x-k)=f(x-k\times1)=f(x)$

Donc : $f(x)=(x-k)^2$ si $x\in[k;k+1[\ k\in\mathbb{Z}$

Exercice 13 : Etudier les variations des fonctions définies par :

1) $g(x)=-\dfrac{x^3}{2026}-2030$ 4) $h(x)=-\dfrac{6}{x}+2000$

Solution : 1) Posons : $f:x\rightarrow x^3$ et $D_f=\mathbb{R}$

Puisque que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que : $g=-\dfrac{1}{2026}f-2030$ avec $-\dfrac{1}{2026}<0$

Alors : $g=-\dfrac{1}{2026}f-2030$:est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	↘

2) $h(x)=-\dfrac{6}{x}+2000$ et $D_h=\mathbb{R}^*$

On sait que : $v:x\rightarrow\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0[$ et

$h(x)=-6h+2000$

Alors : k est croissante sur $]0;+\infty[$ et est croissante sur $]-\infty;0[$ car $-6<0$

Exercice14 : Soit f une fonction :tel que : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f

Tel que $x_1\neq x_2$.

3) Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

PROF: ATMANI NAJIB

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Solution : 1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel *x*, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ Donc f est une fonction impaire,

$f(-x)=-f(x)$

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}$

$$=\frac{x^2{}_1\times x_2+x_2-x^2{}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2\left(x_1-x_2\right)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1\times x_2-1\right)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1\times x_2-1\right)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a) Sur $I=]0;1]$: Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$ Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a $0\prec x_1x_2$

Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

D'où f est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b) Sur $J=[1;+\infty[$; Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ c'est-à-dire : $x_1x_2-1\succ 0$

Et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'
f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗

$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$ et $f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice 15 : Soit les fonctions f et g définies par : $f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\frac{x-1}{x-2}$

1) Déterminer : D_f ; D_g et $D_{f\circ g}$

2) Déterminer : $(f\circ g)(x)$; $\forall x\in D_{f\circ g}$

Solution : 1) →On a : $D_f=\mathbb{R}$

→On a : $x\in D_g \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

→On a : $x\in D_{f\circ g} \Leftrightarrow x\in D_g \;\; et \;\; g(x)\in D_f \Leftrightarrow x\neq 2 \;\; et \;\; g(x)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x\neq 2$

Donc : $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{2\}$

2) Déterminons $(f\circ g)(x)$; $\forall x\in D_{f\circ g}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2-g(x)=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-1)^2-(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

Donc : $(f\circ g)(x)=\frac{x-1}{(x-2)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Exercice16 : Soient f et g les deux fonctions définies par :

$f(x)=-x^2-2x+3$ et $g(x)=\frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3)a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

4)Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

5)a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

Solution : 1) On a : $f(x)=-x^2-2x+3$: f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

$(f(x)=ax^2+bx+c)$ On a : $a=-1$; $b=-2$ et $c=3$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$ et $f(\alpha)=f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)+3=-1+2+3=4$

Alors : la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;f(\alpha))$ c'est à dire : $W(-1;4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$. C'est-à-dire : $x=-1$

Comme : $\boxed{a=-1<0}$ alors :

PROF: ATMANI NAJIB

La fonction f est décroissante sur $[-1;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty;-1]$

Tableau de variations de f : On a $a=-1<0$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↗	4	↘

---

2) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, x ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+2=0$ soit $x=-2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$

On utilisant un résumé de notre cours :

Si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ Avec : $a=1\,;\,b=-1\,;\,c=1\,;\,d=2$

Donc : (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(-2;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=-\dfrac{2}{1}=-2$ et $y=\dfrac{1}{1}=1$

$\mathrm{Det}(g)=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 1-(-1)\times 1=3>0$

Donc : g est strictement croissante sur les intervalles : $]-\infty;-2[$ *et* $]-2;+\infty[$

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	↗	‖	↗

3)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 3\times(-1)=4+11=16>0$

PROF: ATMANI NAJIB

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times(-1)}=\frac{2+4}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$ et $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times(-1)}=1$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$ et $B(1;0)$

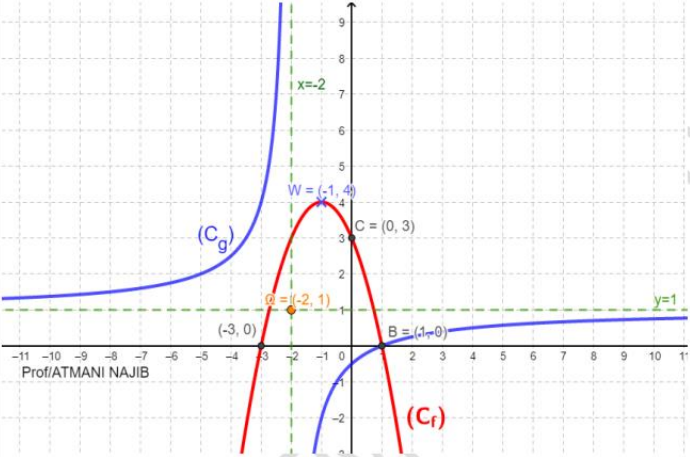
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses :

$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1;0)$

4)Représentation graphique :

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



5) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$:

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc : $x=1$ par suite : $S=\{1\}$

b) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x\in\left]-2;1\right]$ Donc $S=\left]-2;1\right]$

Exercice17 : Soit la fonction h définie sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $h(x)=\sqrt{4x^2-1}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

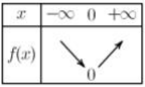
2) Déterminer les variations de h sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Solution : 1) La fonction h se décompose de cette façon : $h = g\circ f$

On a alors : $f(x)=4x^2$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

2) a) $f(x)=4x^2$: $D_f=\mathbb{R}$

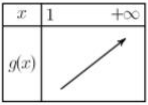
Le tableau de variation de f :



x
$-\infty$
0
$+\infty$
$f(x)$
0

b) $g(x)=\sqrt{x-1}$: $D_g=[1;+\infty[$

Le tableau de variation de g :



c)On a : ⇨ f est croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et on a : $f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)\subset[1;+\infty[$ et effet :

$$x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\Rightarrow x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow 4x^2\geq 1\Rightarrow f(x)\geq 1\Rightarrow f(x)\in[1;+\infty[$$

On a aussi : g est croissante sur $[1;+\infty[$

Donc : La fonction h croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice 18 : Soient f et g les trois fonctions définies par : $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ et $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

1) Donner le tableau de variations de f et g

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminer D_h

b) Calculer : $h(x)=(f\circ g)(x)\quad\forall x\in D_h$

3) Etudier les variations de h sur les intervalles : $]-\infty;0[$; $]0;2]$; $[2;4[$ et $]4;+\infty[$

Solution : 1) a) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$; on a $f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3>0$

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(-1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=-1$ et $y=2$.

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

b) $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$: $D_g=\mathbb{R}$

Le tableau de variation de g : On a : $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=-1$ $(f(x)=ax^2+bx+c)$

$\alpha=-\frac{2}{-2\frac{1}{2}}=2$ et $\beta=g(\alpha)=g(2)=-\frac{1}{2}2^2+2\times2-1=1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe(C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$	↗	1	↘

2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=(f\circ g)(x)$

a) Déterminons D_h :

$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\}$

On a : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ et D_g

$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in D_g\ \ et\ \ g(x)\in D_f\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1\neq-1\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ \ et\ -\frac{1}{2}x^2+2x\neq0$

$x\in D_{f\circ g}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ ;x\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\neq0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\ et\ x\neq0\ et\ x\neq4$

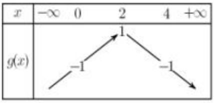
Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{0;4\}=]-\infty;0[\cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

b) Calculons : $h(x)=(f\circ g)(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$; $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{2\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)-1}{-\frac{1}{2}x^2+2x-1+1}=\frac{2x^2-8x+6}{x^2-4x}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $h(x)=\dfrac{2x^2-8x+6}{x^2-4x}$



3) →Etude des variations de h sur l'intervalle : $]-\infty;0[$

On a : $h(x)=(f\circ g)(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{0;4\}$

Puisque g est croissante sur $]-\infty;0[$ et $g(]-\infty;0[)\subset]-\infty;-1[$ et f est croissante sur $]-\infty;-1[$ alors h est croissante sur $]-\infty;0[$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $]0;2]$

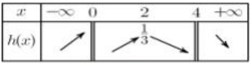
Puisque g est croissante sur $]0;2]$ et $g(]0;2])\subset]-1;1]$ et f est croissante sur $]-1;-1]$ alors h est croissante sur $]0;2]$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $[2;4[$

Puisque g est décroissante sur $[2;4[$ et $g([2;4[)\subset]-1;1]$ et f est croissante sur $]-1;1]$ alors h est décroissante sur $[2;4[$

→Etude des variations de h sur l'intervalle : $]4;+\infty[$

Puisque g est décroissante sur $]4;+\infty[$ et $g(]4;+\infty[)\subset]-\infty;-1[$ et f est croissante sur $]-1;1]$ alors h est décroissante sur $]4;+\infty[$



Exercice 19 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

1) a) Déterminer D_f

b) Démontrer que f admet une valeur minimale en 2 sur D_f

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\sqrt{x-1}$

a) Dresser le tableau de variation de g

b) Représenter (C_g) La courbe représentative de g dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et déterminer :

$g([1;2])$ et $g([2;+\infty[)$

c) Déterminer la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x\in[1;+\infty[$; $f(x)=(h\circ g)(x)$

Puis étudier les variations de f

Solution : 1) a) $f(x)=3x-6\sqrt{x-1}+8$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq1\}=[1;+\infty[$

Par suite : $D_f=[1;+\infty[$

b) Démontrons que f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

PROF: ATMANI NAJIB

C'est-à-dire : montrons $\forall x \in [1;+\infty[\ ; f(x) \geq f(2)$

Soit $x \in [1;+\infty[$: $f(x)-f(2) = 3x-6\sqrt{x-1}+8-8 = 3x-6\sqrt{x-1} = 3\left(x-1-2\sqrt{x-1}+1\right)$

$f(x)-8 = 3\left(\sqrt{x-1}^2 - 2\sqrt{x-1}+1^2\right) = 3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 \geq 0$

Donc : $f(x)+4 \geq 0$ par suite : $f(x) \geq -4$ et on a : $f(0)=-4$ donc $f(x) \geq f(0)$

Donc : $\forall x \in [1;+\infty[\ ; f(x) \geq f(2)$

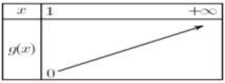
Par suite : f admet une valeur minimale en 2 sur $[1;+\infty[$

2) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=\sqrt{x-1}$

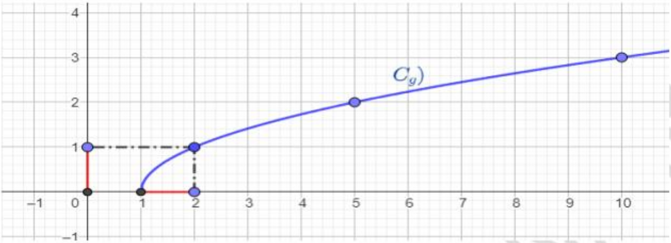
a) Dresser le tableau de variation de g

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} = [1;+\infty[$

g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$


x
1
$+\infty$
$g(x)$
0

b)



c) Déterminons : $g([1;2])$

$\rightarrow x \in [1;2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow g(1) \leq g(x) \leq g(2)$ car g est strictement croissante sur $[1;2]$

$$\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 1 \Rightarrow g(x) \in [0;1]$$

Donc : $g([1;2]) \subset [0;1]$ (1)

→ Réciproquement

Soit $b \in [0;1]$: la droite d'équation : $y=b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[1;2]$

Donc : $\forall b \in [0;1]\ ; \exists! x \in [1;2] / g(x)=b$

Donc : $[0;1] \subset g([1;2])$ (2)

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([1;2])=[0;1]$

d) Déterminons : $g([2;+\infty[)$

$\rightarrow x\in[2;+\infty[\Rightarrow x\geq 2\Rightarrow g(x)\geq g(2)$ car g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

$$\Rightarrow g(x)\geq 1\Rightarrow g(x)\in[1;+\infty[$$

Donc : $g([2;+\infty[)\subset[1;+\infty[\quad(1)$

→ Réciproquement

Soit $b\in[1;+\infty[$: la droite d'équation : $y=b$ coupe (C_g) la courbe représentative de g en un seul point dont l'abscisse appartient à l'intervalle $[2;+\infty[$

Donc : $\forall b\in[1;+\infty[\ ;\ \exists! x\in[2;+\infty[\,/\,g(x)=b$

Donc : $[1;+\infty[\subset g([2;+\infty[)\quad(2)$

Des relations : (1) et (2) on déduit que : $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$

c) Déterminons la fonction polynôme du second degré h tel que : $\forall x\in[1;+\infty[\ ;\ f(x)=(h\circ g)(x)$ puis étudions les variations de f :

Soit $x\in[1;+\infty[$: on a : $f(x)-8=3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$

Donc : $f(x)=3\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+8=3\left(g(x)-1\right)^2+8$

On pose : $h(x)=3(x-1)^2+8$

Donc : $f(x)=h(g(x))=(h\circ g)(x)$

Donc : $f=(h\circ g)$

Dressons le tableau de variation de h :car $h(x)=3(x-1)^2+8$ polynôme du second degré

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	↘	8	↗

On a : $f=(h\circ g)$

- Puisque g est strictement croissante sur $[1;2]$ et $g([1;2])=[0;1]$ et h est strictement décroissante sur $[0;1]$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement décroissante sur $[1;2]$
- Puisque g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ et $g([2;+\infty[)=[1;+\infty[$ et h est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ alors $f=(h\circ g)$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

Exercice 20 : On considère les fonctions : $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ et (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g

1)Déterminer la nature de la courbe (C_f) de f et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de f et dresser le Tableau de variations de f

2)Déterminer la nature de la courbe (C_g) de g et ces éléments caractéristiques et étudier les variations de g et dresser le Tableau de variations de g

3)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

4)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère

5)Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Déterminer algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

7)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

8)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h

b) Montrer que la fonction h est paire

c)Vérifier que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^{+}-\{2\}$

9)Tracer la courbes (C_h) de h et (C_g) dans un même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

10)Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x)=m$

Solution : 1) : On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=0$ $f(x)=x^2-2x$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\times1}=1$ et $f(1)=1^2-2\times1=-1$

Ainsi : dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(-\alpha;\beta)=W(1;-1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

On a $a=1>0$: La fonction f est donc croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;1]$

Le tableau de variations de f : $a=1>0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

2) (En utilisant un résumé de notre cours) : Si : $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq0$ alors (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

1iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\succ0$ alors g est strictement croissante

2iér cas : si $\det g=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc<0$ alors g est strictement décroissante

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{1x+0}{x-2}$ donc (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega(2;1)$ et

d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{-2}{1}=2$ et $y=\frac{1}{1}=1$

$\det g=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 0=-2<0$

Donc : g est strictement décroissante sur les intervalles : $]-\infty;2[$ *et* $]2;+\infty[$

b) Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

3)Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère

$f(x)=x^2-2x$

a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x)=0$

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x=0$

Signifie $x(x-2)=0$

Signifie $x=0$ ou $x-2=0$

Signifie $x=0$ ou $x=2$

Donc : les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $O(0;0)$ et $A(2;0)$

Donc : $(C_f)\cap(ox)=\{A(2,0);O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times 0=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

Donc : $(C_f)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

4)Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère : $g(x)=\frac{x}{x-2}$

a) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $g(x)=0$

$g(x)=0$ Signifie $\frac{x}{x-2}=0$ Signifie $x=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $O(0;0)$

Donc : $(C_g)\cap(ox)=\{O(0,0)\}$

b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $g(0)=\frac{0}{0-2}=0$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des ordonnées est : $O(0;0)$

$(C_g)\cap(oy)=\{O(0,0)\}$

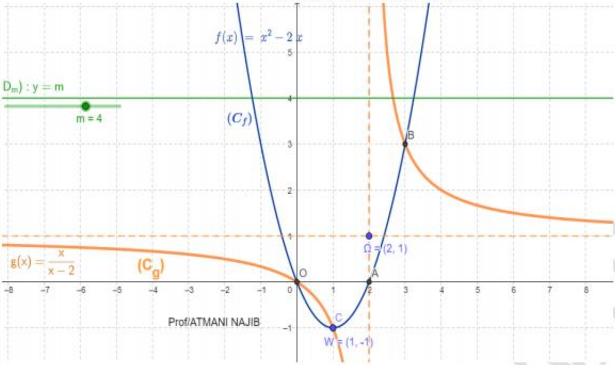
5)Représentation des courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe (C_g) :

-2	-1	0	2	3	4	4
5/3	2	3	▨	3	2	5/3

La courbe (C_f) : $f(x)=x^2-2x$

x	2	3	4
$f(x)$	0	3	8



6) Déterminons algébriquement les points d'intersection de (C_f) et (C_g)

Résolvons dans : $\mathbb{R}-\{2\}$ l'équation : $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $x^2-2x=\frac{x}{x-2}$

Signifie que : $x(x-2)-\frac{x}{x-2}=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Signifie que : $x\left(x-2-\frac{1}{x-2}\right)=0$ signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $x\left(\frac{(x-2)^2-1^2}{x-2}\right)=0$ signifie que : $x\left(\frac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-2}\right)=0$

Signifie que : $\frac{x(x-3)(x-1)}{x-2}=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x(x-3)(x-1)=0$ avec $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

Signifie que : $x=0$ ou $x-1=0$ ou $x-3=0$

Signifie que : $x=0$ ou $x=1$ ou $x=3$

Et par suite : $(C_f)\cap(C_g)=\{C(1,-1);O(0,0);B(3,3)\}$

7)Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$

Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\leq g(x)$ équivaut à déterminer les intervalles dont on a (C_f) est au-dessous de (C_g)

Donc : graphiquement : $S=[0,1]\cup]2,3]$

---

8)Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}$

a) Déterminons l'ensemble de définition D_h

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/|x|-2\neq 0\}$

$|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

b) Montrons que la fonction h est paire

- si $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$
- $h(-x)=\frac{|-x|}{|-x|-2}=\frac{|x|}{|x|-2}=h(x)$ C'est à dire : $h(-x)=h(x)$

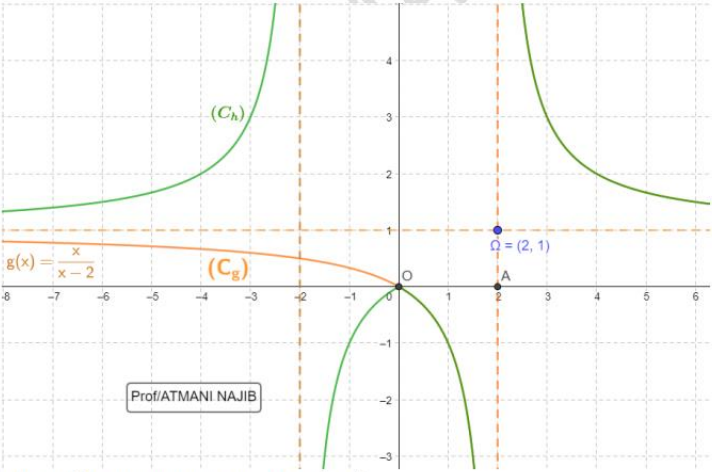
Donc h est une fonction paire,

c)Vérifions que $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

Soit : $\mathbb{R}^+-\{2\}$ on a : $h(x)=\frac{|x|}{|x|-2}=\frac{x}{x-2}=g(x)$ car $|x|=x$

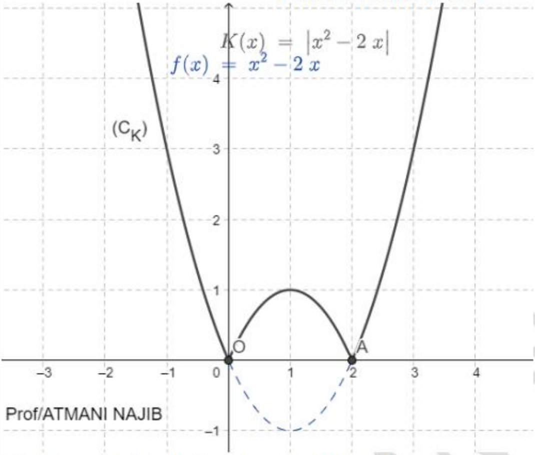
Donc : $h(x)=g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^+-\{2\}$

9) Représentation de la courbes (C_h) de h dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



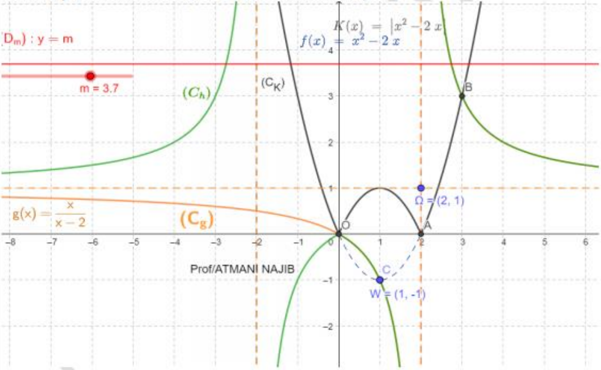
10) Soit K la fonction définie par : $K(x)=|f(x)|$

a) Tracer la courbes (C_K) de K dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$



NAJIB

Remarque : tous les courbes dans un même repère :



b) Discutons suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de

L'équation $K(x) = m$

Le nombre de solutions de l'équation $K(x) = m$: est le nombre de points d'intersection de (C_K) et la droite (D_m) d'équation : $(D_m)\quad y = m$

▹ Si $m < 1$: l'équation n'a pas de solutions

▹ Si $m = 0$: l'équation admet deux solutions

▹ Si $0 < m < 1$: l'équation admet 4 solutions

▹ Si $m = 1$: l'équation admet 3 solutions

▹ Si $m > 1$: l'équation admet deux solutions

Exercice 21 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$

1) Etudier la parité de f

2) Montrer que f est majorée par 1 est minorée par -1

3)Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

a) Donner le tableau de variation de g :

b) Déterminer : $g([0;2[)$

4) Soit h une fonction numérique tel que : $h(x) = x^4$

a) Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}^+$

b) Vérifier que : $f = g \circ h$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

ATMANI NAJIB

Solution :1) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^4+1}$

Etudions la parité de f

$x\in D_f \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x^4+1\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ et $x^4\neq -1$: qui est une proposition vraie

Par suite : $D_f=\mathbb{R}$

- si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{(-x)^4-1}{(-x)^4+1}=\frac{x^4-1}{x^4+1}=f(x)$ C'est à dire : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Montrons que f est majorée par 1 est minorée par -1

$f(x)-1=\frac{x^4-1}{x^4+1}-1=\frac{-2}{x^4+1}\prec 0$

Donc : $f(x)<1$ dans $\mathbb{R}$

Donc : f est majorée par 1

$f(x)+1=\frac{x^4-1}{x^4+1}+1=\frac{2x^4}{x^4+1}\geq 0$

Donc : $-1\leq f(x)$ dans $\mathbb{R}$

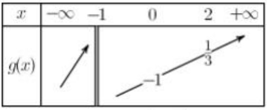
Donc : f est minorée par -1

3)Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

a) Donner le tableau de variation de g

$g(x)=\frac{x-1}{x+1}$: on a : $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2>0$

Donc :g est strictement croissante sur : $]-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1[$



b) Déterminons : $g([0;2[)$

Du tableau de variation de g en déduit que : $g([0;2[)=\left[-1;\frac{1}{3}\right[$

4)Soit h une fonction numérique tel que : $h(x)=x^4$

a) Etudions les variations de h sur $\mathbb{R}^+$

Soient $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1^{\,4}-x_2^{\,4}}{x_1-x_2}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})}{x_1-x_2}=(x_1+x_2)(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})>0$$

car : $x_1\geq 0$ et $x_2>0$ alors : $x_1+x_2>0$ et puisque : $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}>0$

PROF. ATMANI NAJIB

Par suite h est croissante sur $\mathbb{R}^+$

b) Vérifions que : $f = g \circ h$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{h(x)-1}{h(x)+1} = \frac{x^4-1}{x^4+1} = f(x)$$

Donc : $f = g \circ h$

c) Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

On a : $f = g \circ h$ sur $\mathbb{R}^+$

Puisque h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $f = g \circ h$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme f est une fonction paire

Alors : f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Exercice22 : Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}$

1) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(-\frac{5}{2}\right)$

2) Déterminer $D_f = \mathbb{R}$

3) Montrer que la fonction f est périodique de période 1

4) Donner une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle : $I = [0;1[$

5) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3[\cap D_f$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

PROF. ATMANI NAJIB

Solution : $f(x) = \dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)}$

1) $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-E\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+1-E\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}+1-0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{-\frac{5}{2}-E\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{5}{2}+1-E\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{-\frac{5}{2}-(-3)}{-\frac{5}{2}+1-(-3)} = \frac{-\frac{5}{2}+3}{-\frac{5}{2}+4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

2) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1-E(x) \neq 0\} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Methode1 : $\forall x \in \mathbb{R}$; On a : $E(x) \leq x \prec E(x)+1 \Rightarrow E(x) \leq x \Rightarrow E(x) \leq x \prec x+1$

$\Rightarrow E(x) \prec x+1$

ATMANI NAJIB

$\Rightarrow 0 \prec x+1-E(x) \Rightarrow x+1-E(x) \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

Methode2 : $\forall x \in \mathbb{R}$; On a : $x-1 \prec E(x) \leq x \Rightarrow -x \leq -E(x) \prec -x+1$

$\Rightarrow -x+x+1 \leq x+1-E(x) \prec -x+1+x+1 \Rightarrow 1 \leq x+1-E(x) \prec 2 \Rightarrow 1 \leq x+1-E(x) \neq 0$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

3) Montrer que 1 est une période pour la fonction f

- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$ et $x-1 \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x+1) = \dfrac{x+1-E(x+1)}{x+1+1-E(x+1)} = \dfrac{x+1-E(x)-1}{x+1+1-E(x)-1} = \dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)} = f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

4) Puisque :1 est une période pour la fonction f alors il suffit d'étudier la fonction f sur : $I = [0;1[$

Une expression simple de $f(x)$ sur l'intervalle $I = [0;1[$:

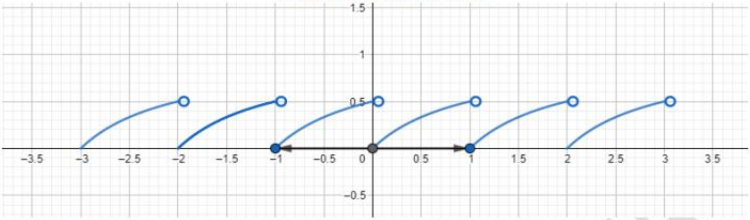
$x \in [0;1[\Leftrightarrow 0 \leq x \prec 1$ Donc : $E(x) = 0$

Donc : $f(x) = \dfrac{x-E(x)}{x+1-E(x)} = \dfrac{x-0}{x+1-0} = \dfrac{x}{x+1}$ Donc : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ si $x \in [0;1[$

5) Traçage de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3[\cap D_f$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-3;3[$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[0;1[$ et utiliser les translation $k\vec{i}$

On a : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ si $x \in [0;1[$



Exercice23 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $E\left(2\sqrt{n^2+n+1}\right)$ est impair.

Solution : On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $n^2+n+\dfrac{1}{4} \prec n^2+n+1 \prec n^2+2n+1$ (vérification simple)

Donc : $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 \prec n^2+n+1 \prec (n+1)^2$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \prec \sqrt{n^2+n+1} \prec \sqrt{(n+1)^2}$

Donc : $n+\frac{1}{2} \prec \sqrt{n^2+n+1} \prec n+1$

Donc : $2n+1 \prec 2\sqrt{n^2+n+1} \prec 2n+2$

Donc : $2n+1 \leq 2\sqrt{n^2+n+1} \prec (2n+1)+1$

Donc : $E\left(2\sqrt{n^2+n+1}\right) = 2n+1$ est impair.

C'est-à-dire : $E\left(2\sqrt{n^2+n+1}\right)$ est impair.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI N